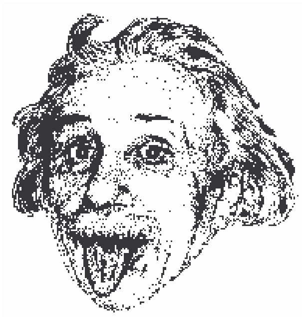


Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

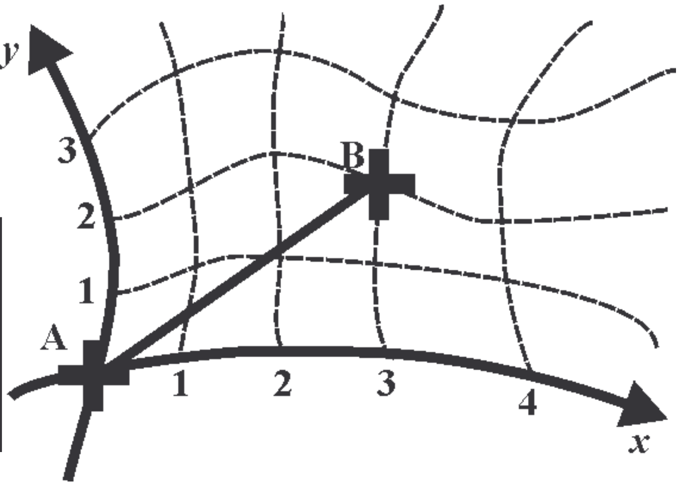
Lektion 16

Abstände in einer verzerrten Metrik

Natürlich ist es denkbar, die **Gummimatte** (= **Metrik**) noch viel verrückter zu verzerren!

Bislang haben wir die Verzerrung gleichmäßig vorgenommen. Gummimatten lassen sich auch ganz wild und unregelmäßig dehnen (siehe rechts).

*Bei einer **unregelmäßigen Metrik** ist es notwendig, für **jedes einzelne** Kästchen im Gitter **separat** die Maßstäbe festzulegen!*



Die Berechnung des Abstandes $\overline{AB}$ wird bei einer unregelmäßigen Metrik deutlich schwieriger. Die einzelnen Koordinatenkästchen haben nicht mehr gleiche Seitenlängen, sondern sind individuell verzerrt.

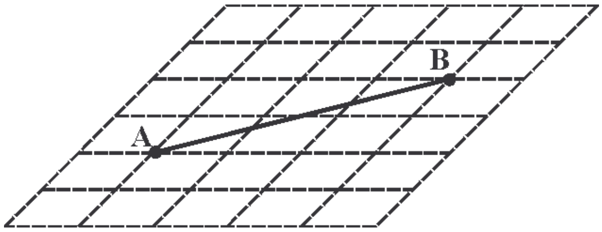
Um die Sache doch noch ein wenig anschaulicher zu machen, wählte Albert Einstein ein besser nachvollziehbares Bild:

Die Metrik einer flachen und einer gekrümmten Ebene

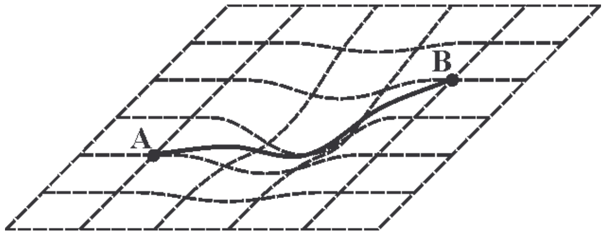
Stellen wir uns also die Punkte A und B zunächst auf einer **flachen Gummimatte** vor (siehe Abb. links auf der folgenden Seite).

Da hier eine völlig **regelmäßige Metrik** vorliegt, berechnet sich der Abstand einfach:

$$\overline{AB}^2 = (3 \cdot \mathbf{1\,cm})^2 + (2 \cdot \mathbf{1\,cm})^2 \Rightarrow \overline{AB} \approx \underline{\underline{3{,}6cm}}$$



A,B auf einer flachen Gummimatte



A,B auf einer verkrümmten Gummimatte

Im Vergleich dazu ist die **Metrik** in der rechten Abbildung **verkrümmt**. Die einzelnen Kästchen sind umso mehr verzerrt, je stärker die Krümmung der Gummimatte ist.

Auch hier ist es gar nicht einfach, den Abstand $\overline{AB}_{verkrümmt}$ in der verkrümmten Metrik zu berechnen. Dazu müsste man genau die Abmessungen der einzelnen Metrik-Kästchen wissen.

Aber: Auf der verkrümmten Gummimatte ist der Weg von A nach B auf jeden Fall länger!

Damit ist klar:

$$\overline{AB}_{verkrümmt} > \overline{AB}_{flach}$$

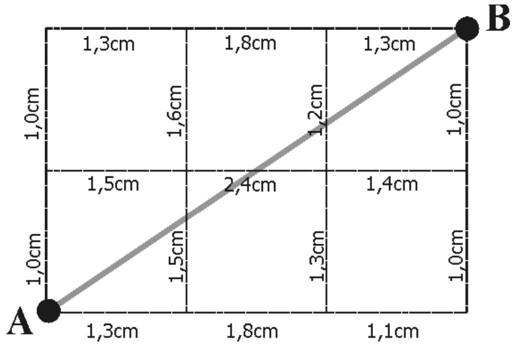
*Zwei Punkte A, B haben in einer **verkrümmten Metrik** einen **größeren Abstand** voneinander als in einer regelmäßigen, flachen Metrik.*

*Je **stärker** die **Krümmung** der Metrik ist, desto **größer** ist der **Abstand** der zwei Punkte.*

Aufgabe 6 – Abstände in einer verzerrten Metrik (näherungsweise)

*Normalerweise lernen Mathematikstudentinnen und –studenten im Gebiet **Differenzialgeometrie** die Berechnung von Abständen in einer verzerrten Metrik. Dennoch solltest Du mal versuchen, näherungsweise so einen Abstand $\overline{AB}_{verkrümmt}$ zu berechnen.*

Unten siehst Du die verkrümmte Gummimatten-Metrik als regelmäßiges Gitter. An jeder Kästchen-Kante ist deren Länge angegeben. Diese Angaben variieren je nach Krümmung:



➢ *Berechne $\overline{AB}_{verkrümmt}$ so genau wie möglich! Zerlege [AB] in mehrere Teile!*