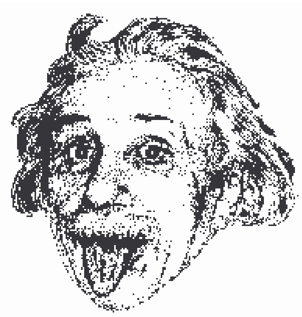
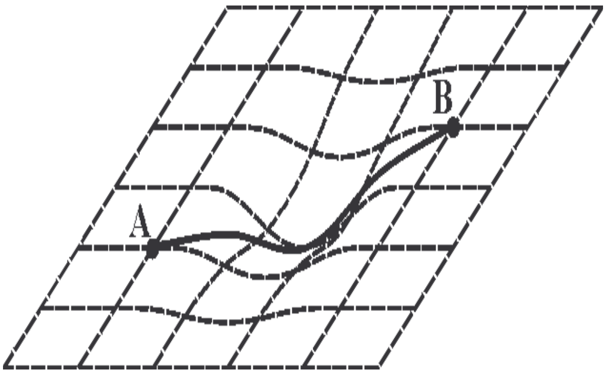
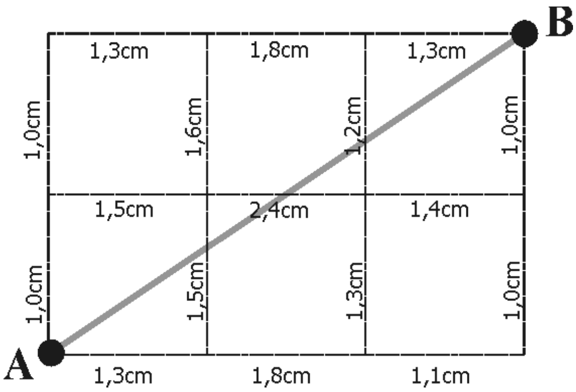


Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 17

Abstände in einer verzerrten Metrik





In Aufgabe 6 waren zwei Punkte A und B in einer verzerrten Metrik (Abb. oben links) gegeben, und man sollte den Abstand $\overline{\mathrm{AB}}_{verkrümmt}$ so genau wie möglich berechnen. Hierzu ist es nützlich, die verzerrte Metrik näherungsweise in einem regelmäßigen Gitter darzustellen. Bei dieser Darstellung im regelmäßigen Gitter ist es dann aber nötig, die Abstände von Gitterpunkt zu Gitterpunkt ausdrücklich anzugeben (Abb. oben rechts).

*Eine **verzerrte Metrik** lässt sich stets nur **näherungsweise** in einem **regelmäßigen, rechtwinkligen Gitter** wiedergeben. Um wirklich **exakt** zu sein, müsste man das regelmäßige, rechtwinklige Gitter zwischen A und B in unendlich viele, unendlich kleine Kästchen einteilen – natürlich mit unendlich vielen Abstandsangaben! (→ Differenzialgeometrie)*

Bei der genäherten Berechnung von $\overline{\mathrm{AB}}_{verkrümmt}$ könnte man die Strecke [AB] z.B. in vier Teile zerlegen – nämlich jedes Mal, wenn die Strecke eine Kästchengrenze überschreitet.

Dann ergäbe sich:

$$\overline{\mathrm{AB}}_{verkrümmt} \approx \sqrt{(1{,}3cm)^2 + (\tfrac{2}{3}\cdot 1{,}5cm)^2} + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\cdot 2{,}4cm)^2 + (\tfrac{1}{3}\cdot 1{,}5cm)^2} +$$
$$+\sqrt{(\tfrac{1}{2}\cdot 2{,}4cm)^2 + (\tfrac{1}{3}\cdot 1{,}2cm)^2} + \sqrt{(1{,}3cm)^2 + (\tfrac{2}{3}\cdot 1{,}2cm)^2} \approx$$
$$\approx 1{,}64cm + 1{,}3cm + 1{,}26cm + 1{,}53cm = \underline{\underline{5{,}73cm}}$$

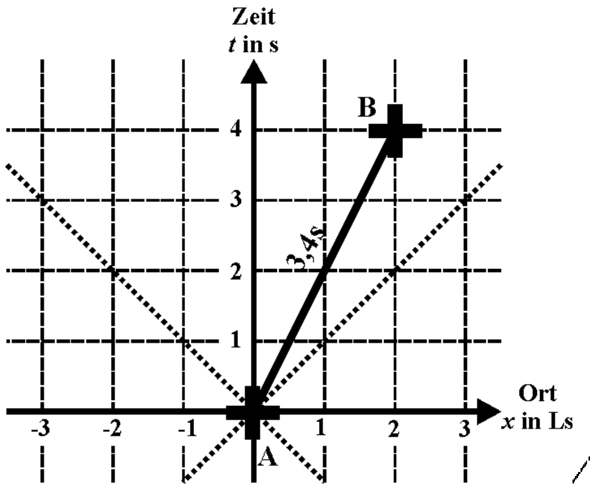
Es ist leicht einzusehen, dass das **Koordinatensystem** und die **Abstandsmessung** in einer verzerrten Metrik nichts mehr miteinander zu tun haben. In der Beispielsmetrik sind die Punkte A und B im Gitter des Koordinatensystems genau 3 Schritte in x-Richtung und 2 Schritte in y-Richtung voneinander entfernt. Aus dieser Koordinaten-Information (3 | 2) lässt sich allerdings in einer verzerrten Metrik **nichts** mehr über den Abstand $\overline{\mathrm{AB}}$ folgern.

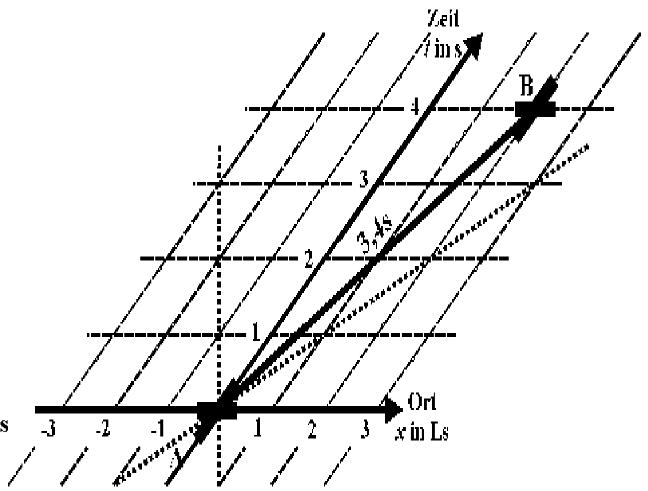
*In einem **Koordinatensystem** mit **verzerrter Metrik** sollten wir zwei Dinge beachten:*

- *Das **Koordinatensystem** lässt <u>keinerlei</u> Aussagen über den **Abstand** zweier Punkte A und B zu. Wir berechnen $\overline{\mathrm{AB}}$ mit Hilfe der **Metrik** (bzw. deren Abstandsangaben).*
- *Dennoch ermöglicht es das **Koordinatensystem** nach wie vor, jede **Position** eindeutig zu beschreiben. Wenn wir im obigen Beispiel den Ursprung (0 | 0) links unten setzen, so liegt A bei (1 | 2) und B bei (4 | 4).*

Abstände in der verzerrten Raum-Zeit (I)

Bislang war unsere Raumzeit regelmäßig. Der Einfachheit wegen haben wir die Diagramme stets nur mit einer Ortsachse (x-Achse) und der Zeitachse gezeichnet (siehe Abb. unten links).





Damit wir uns die Raumzeit verzerrt vorstellen können, müssen wir dieses Raumzeit-Diagramm zunächst nach hinten in den Raum „kippen“ (siehe Abb. oben rechts).

Denn dann können wir in diese Raumzeit „Dellen“ hinein machen – genau wie im Beispiel zuvor! Und mit dieser neuen Idee wird aus der **regelmäßigen Raumzeit-Metrik** von Hermann Minkowski endlich die sagenumwobene **Metrik der verzerrten Raumzeit**!

Dazu beachten wir bei den relativistischen Raumzeit-Abständen bloß den gleichen Grundsatz:

***Weltlinien [AB]**, die durch eine **Verkrümmung** („Delle“) laufen, haben eine **größere Länge** $\overline{\mathrm{AB}}$ als Weltlinien [AB], die durch eine regelmäßige Metrik laufen. Je **stärker** die Verkrümmung ist, desto größer ist die Länge $\overline{\mathrm{AB}}$.*