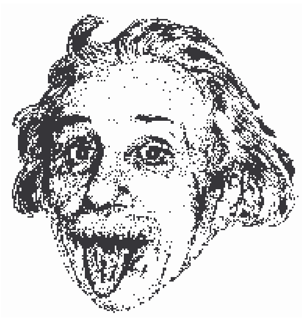


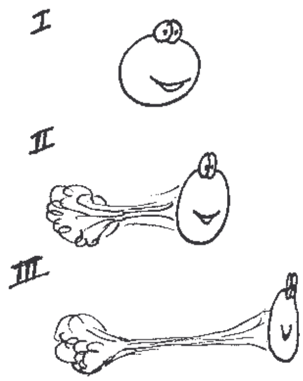
Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 1

1905: Die Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

Nachdem Albert Einstein im Jahre 1905 seine **Spezielle Relativitätstheorie (SRT)** veröffentlicht hatte, hörte der Physiker nicht auf, über Zeit, Raum, Licht und die herrschenden Naturgesetze nachzudenken.

Natürlich war seine SRT immens erfolgreich. Denn mehrere Beobachtungen aus dem Weltall waren mit nur mit der SRT korrekt erklärbar. Überall, wo riesige Geschwindigkeiten auftauchen, kommt es zu Phänomenen wie **Zeitdilatation** oder **Längenkontraktion**. Deshalb fanden Wissenschaftler zum Beispiel auch bei Untersuchung von beschleunigten Teilchen in vielen Fällen nur durch die SRT eine sinnvolle Erklärung.



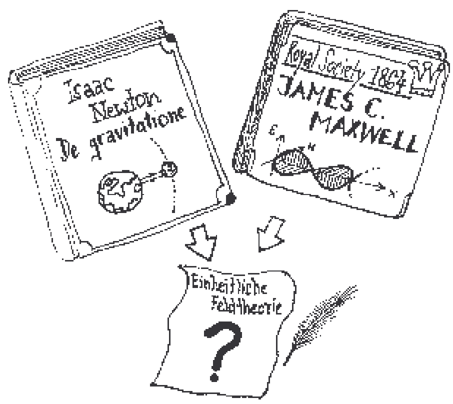
1915: Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART)

Was trieb also Einstein dazu, zehn Jahre später erneut einen Clue zu landen: **Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART)**? Welche Fragen versuchte Einstein damit zu beantworten? Und was sind die grundlegenden Ideen der ART?

- **Die Suche nach der „Einheitlichen Feldtheorie“**

  Die Welt, die Einstein zu erfassen suchte, sah zu Beginn seiner Bemühungen noch recht einfach aus:

  Man kannte **zwei Kraftfelder**, nämlich das **elektromagnetische Feld** und das **Gravitationsfeld**. Beide Phänomene gehorchten unterschiedlichen physikalischen Gesetzen. Es gab Isaac



Newtons Gravitationsgesetz und James Maxwells Gleichungen für die Bereiche Elektrizität & Magnetismus.

Es schien physikalisch so vernünftig wie reizvoll, danach zu fragen, ob die **beiden** Bereiche der Natur nicht mit einer **einzigen** Theorie schlüssig erklärt werden können.

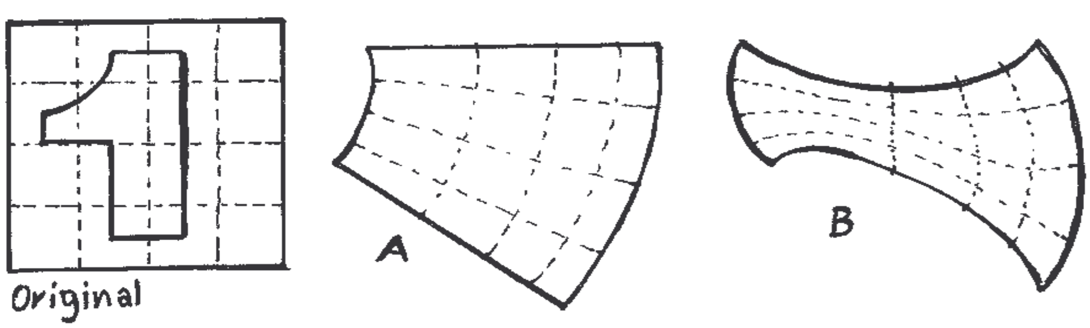
In Einsteins **SRT** kommt die **Gravitation** überhaupt **nicht** vor. Daher erkannte der Physiker, dass die SRT keinen Zugang zur „einheitlichen Feldtheorie“ bieten kann. Zehn Jahre arbeitete Albert Einstein nun daran, den bekannten **dreidimensionalen Raum** auf eine **vierdimensionale Raum-Zeit** zu erweitern.

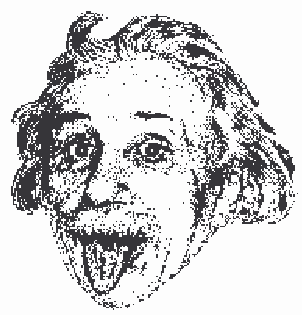
Und Einstein integrierte die **Gravitation** vollständig in diese **Raum-Zeit**: Wenn sich nämlich **Massen** in der **Raum-Zeit** befinden, so führen diese Massen in Einsteins **ART** zu Verkrümmungen der Raum-Zeit.

Wegen dieser Verkrümmungen fliegt dann zum Beispiel ein Meteor nicht mehr geradlinig an der Erde vorbei – nein, seine **Flugbahn** ist **gekrümmt**, einfach weil auch die gesamte **Raum-Zeit** in sich **gekrümmt** ist! (Das ist ein bisschen so, als ob ich mich auf der Erdoberfläche geradlinig bewegen möchte. Weil aber die Erdoberfläche gekrümmt ist, bewege ich mich zwangsläufig auf einer gekrümmten Bahn anstatt auf einer Geraden. Im Gegensatz zur Krümmung der Raum-Zeit ist die Krümmung der Erde allerdings für uns sehr leicht feststellbar).

Aufgabe 1 – Ein Vorgeschmack: Zweidimensionale, verkrümmte Räume

➢ *Versuch doch einmal, die linke Originalzeichnung (Standardmäßiger zweidimensionaler Raum) in die beiden verkrümmten zweidimensionalen Räume zu übertragen. Die neuen Zeichnungen sind völlig verkrümmt. In der ART muss man sich dann aber vorstellen, dass Lebewesen und Materie in diesen Räumen von der Verkrümmung nichts spüren!*





Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 2

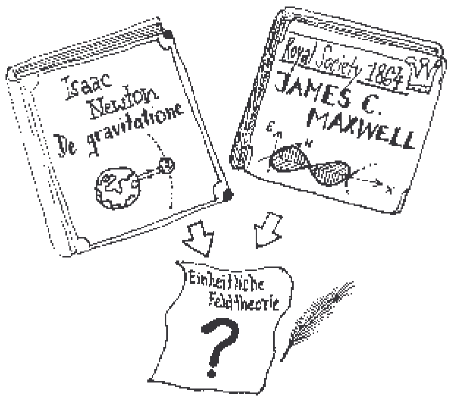
1915: Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART)

Einstein versuchte also, die Gravitation in seine Theorie zu integrieren. Auf diese Weise hat er die ART entwickelt. Welche weiteren Ziele Albert Einstein mit seiner neuen Theorie im Jahre 1915 hatte, lässt sich vielleicht wie folgt zusammenfassen:

- **Die Suche nach der „Einheitlichen Feldtheorie“ (Fortsetzung)**

  Einstein hat also in der ART die **Gravitation** vollkommen in die **vierdimensionale Raum-Zeit-Geometrie** integriert.

  Massen können nach der ART die **Raum-Zeit** verkrümmen. Der Mond, der normalerweise immer geradlinig dahinflöge, kreist auf einer krummen Bahn um die Erde, weil die Erde in ihrer Umgebung die Raum-Zeit krumm biegt!

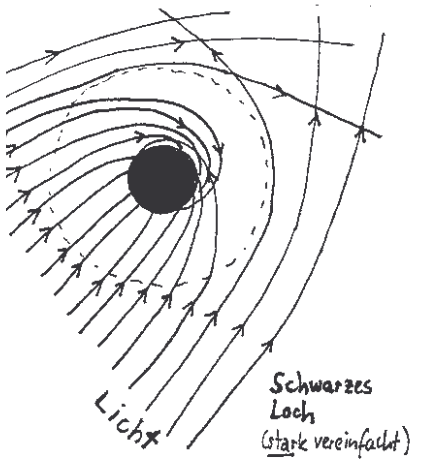


Daher ist Isaac Newtons Gravitationsgesetz in der ART nicht mehr nötig.

Außerdem sagte **Newtons Gravitationsgesetz** aus, dass sich Objekte gegenseitig anziehen, wenn sie **Masse** besitzen. Das oft beobachtete Phänomen im Weltall, dass schwere Himmelskörper sogar **Licht** anziehen und dadurch von der geradlinigen Bahn ablenken, lässt sich mit Newton nicht erklären: **Lichtphotonen** gelten als **masselos**!

In der ART klärt sich die **Anziehung von Licht** durch andere Objekte einfach durch die **Raum-Zeit-Krümmung**.

Auch die Existenz von so genannten **„Schwarzen Löchern“** konnte erstmals mit der ART erklärt werden:

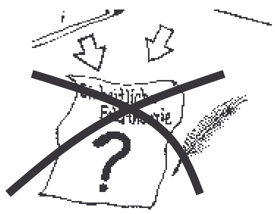


In der ART sind Sonnen mit so **großer Raum-Zeit-Krümmung** (= Gravitation!) möglich, dass **keinerlei Licht** mehr von ihnen entweichen kann, wenn das Licht eine **gewisse Entfernung** unterschritten hat!

• Die ART und die „einheitliche Feldtheorie“

Die ART 1915 ist für die Physik ein Meilenstein gewesen!

Einsteins Versuch, mit der ART, die **„einheitliche Feldtheorie“** zu schaffen, ist allerdings letztlich gescheitert. Er hätte dazu nämlich auch noch die **elektromagnetischen Gesetze** irgendwie in die **Raum-Zeit-Geometrie** „einbauen“ müssen.
Das aber leistet die ART nicht.



Es gibt also in der Physik auch nach Einstein noch viel zu tun!

• Die Allgemeine und die Spezielle Relativitätstheorie

Albert Einsteins ART ist eine völlig neue Theorie. Man kann eigentlich kaum mehr von einer wirklichen „Verwandtschaft“ zwischen der SRT und der ART sprechen. Schon die Art der mathematischen Gleichungen ist vollkommen anders.

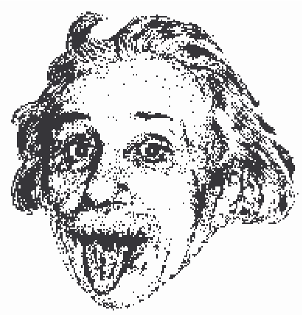
Die Masse der einzelnen Gegenstände und damit deren Gravitation spielen in der SRT gar keine Rolle. Umso mehr achtete Albert Einstein bei der ART auf eine zweite Forderung:

Wenn ich die **Massen** der einzelnen beteiligten Gegenstände als klein **vernachlässige**, so muss die neue **ART** zu den **gleichen Vorhersagen** kommen wie die frühere **SRT**!

Aufgabe 2 – Wir erinnern uns: Was besagt die Hauptforderung der SRT?

➢ *Wie lautet die Hauptforderung der SRT?*

➢ *Erinnere Dich auch, wie man daraus kurz anschaulich begründen kann:*
Für einen ruhenden Beobachter muss eine bei ihm ruhende Lichtuhr zwangsläufig in schnellerem Takt „ticken“, als eine bewegte Lichtuhr, die gerade an ihm vorbeifliegt!



Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 3

Raum und Zeit vereinigen sich zur „Raumzeit“

„Die“ Zeit gibt es nicht – Zeit hängt vom Beobachter ab

Die **Hauptforderung** der **Speziellen Relativitätstheorie (SRT)** war:

> *Jeder beliebige **Beobachter** misst für die **Lichtgeschwindigkeit** denselben Wert c.*

Das Problem der SRT war, dass dies selbst für verschiedene Beobachter gilt, die sich relativ zu einer Lichtquelle unterschiedlich bewegen. Trotz der unterschiedlichen Bewegung relativ zur Lichtquelle messen die Beobachter dennoch den gleichen Wert für die Lichtgeschwindigkeit. Deshalb war eine seltsame **Folge dieser Hauptforderung**:

> ***Zeitdilatation**: Für relativ zueinander bewegte Beobachter läuft die Zeit nicht gleich schnell (nicht synchron).*

Es macht wegen der SRT gar keinen Sinn mehr, von „**der**“ **Zeit** im dreidimensionalen Raum zu reden. Denn Zeitangaben hängen grundsätzlich vom jeweiligen Beobachter ab.

Die „Raumzeit“ des Mathematikers Hermann Minkowski

Es bestand also das Dilemma, dass **räumliche** und **zeitliche Angaben** stets Abhängig vom **Beobachter** waren. Je nachdem, wie sich der Beobachter durch den Raum bewegt, fallen seine Zeitangaben unterschiedlich aus.

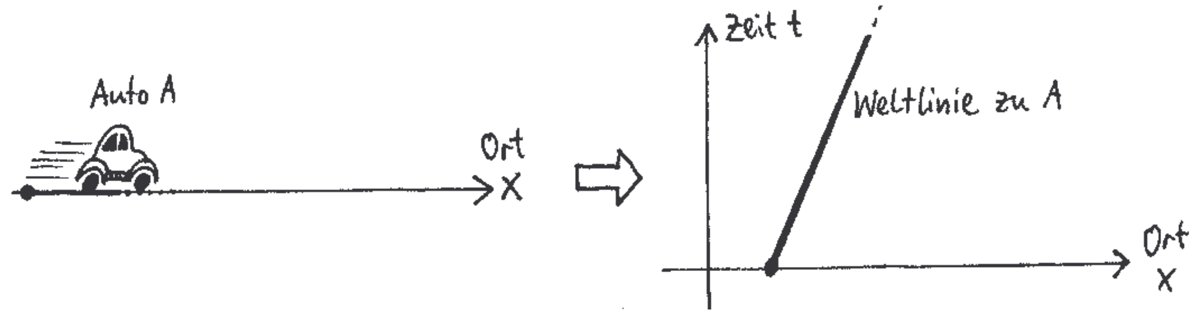
Das Dilemma ließ sich für den **Mathematiker Minkowski** im Jahre 1908 nur dadurch lösen, dass er Raum und Zeit zur **Raumzeit** vereinigte!

Nur die **Raumzeit** als Gesamtheit ist vom Beobachter unabhängig!

Die Struktur der Raumzeit: Einführung in Weltlinien

Zunächst betrachten wir ein **Auto A**, das sich in einem **eindimensionalen Raum (1D)** – d.h. auf einer Geraden – bewegen kann. Wir erweitern die Darstellung um eine **Zeitachse**.

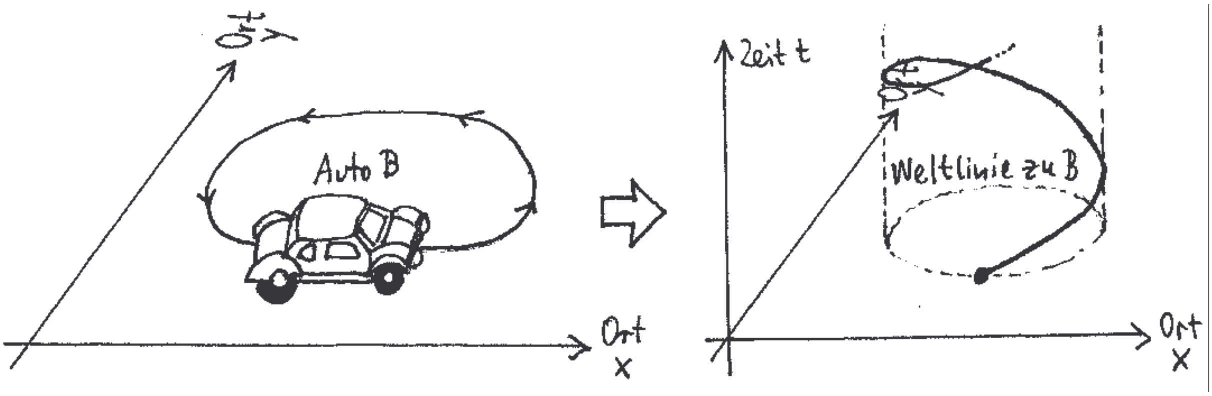
Dadurch erzeugt das **Auto A** die so genannte **Weltlinie A** in der **Raumzeit**:



Der **1D-Raum** (*x*-Achse) bewirkt also eine **zweidimensionale Raumzeit** (*x*-, *t*-Achse).

Bewegt sich das **Auto B** in einem **zweidimensionalen Raum (2D)** – z.B. auf der *x*-*y*-Ebene – lässt sich die Darstellung analog um die Zeitachse ergänzen.

Das **Auto B** erzeugt die **Weltlinie B** in der **Raumzeit**:
(„Weltlinien" müssen übrigens nicht geradlinig sein – sie können gebogen sein!)

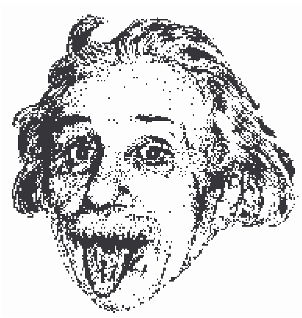


Der **2D-Raum** (*x*-, *y*-Achse) bewirkt also eine **dreidimensionale Raumzeit** (*x*-, *y*-, *t*-Achse).

Analog gilt natürlich:

> *Der übliche **3D-Raum** bewirkt eine **vierdimensionale Raumzeit** mit x-, y-, z- und t-Achse.*

Die vierdimensionale Raumzeit lässt sich freilich nicht in Diagrammen darstellen.
In unseren Erklärungen zur ART werden wir uns deshalb häufig auf den 1D-Raum und die zugehörige zweidimensionale Raumzeit beschränken.



Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

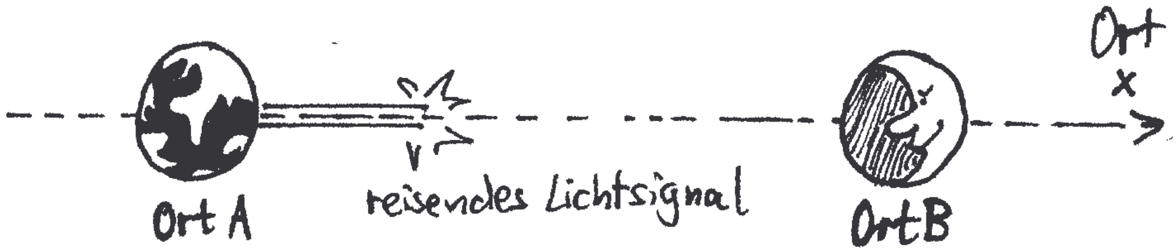
Lektion 4

Raum und Zeit vereinigen sich zur „Raumzeit“ (II)

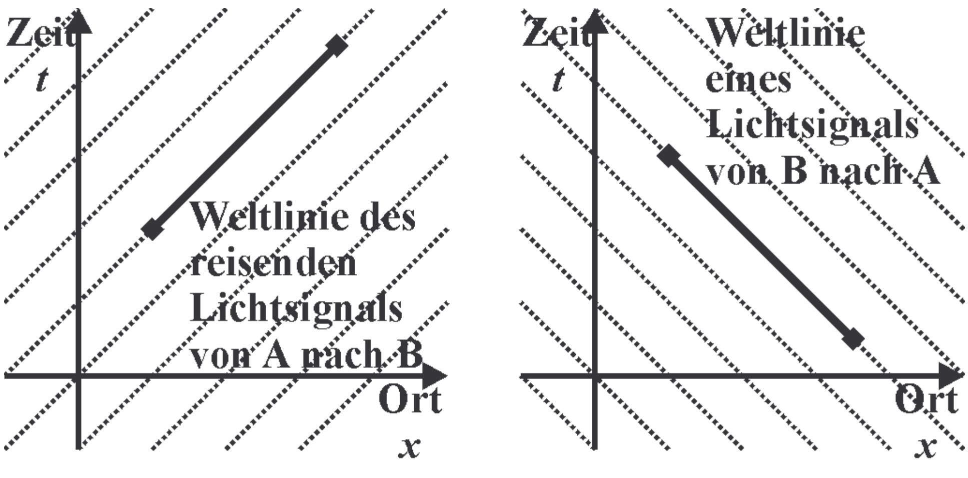
Die Struktur der Raumzeit: Die Weltlinien des Lichts

Wir betrachten vorläufig nur eindimensionale Probleme.

Am **Ort A** schickt jemand **Licht** los, bis es am **Ort B** ankommt. Dieses Problem ist eindimensional, da eine einzige Ortsachse (x-Achse) ausreicht, um die Situation zu erfassen:



Man wählt nun die **Maßstäbe** auf den **Orts**- und der **Zeitachsen** häufig so, dass die **Weltlinien** von **Licht** genau im **45°-Winkel** im Raumzeit-Diagramm verlaufen (siehe unten links):



Bei umgekehrter Bewegungsrichtung des Lichts (z.B. von Ort B nach Ort A) verlaufen die Licht-Weltlinien wie oben rechts gezeigt – jedoch natürlich auch im 45°-Winkel!

Die Struktur der Raumzeit: Unmögliche Weltlinien

Wir haben die Maßstäbe der Achsen so gewählt, dass Licht stets Weltlinien im 45°-Winkel erzeugt. Jetzt müssen wir uns an eine wesentliche Folgerung der SRT erinnern:

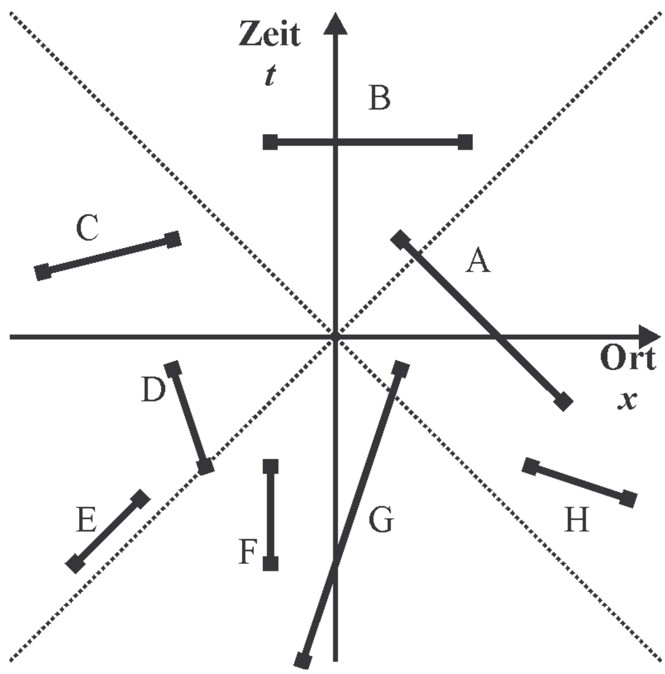
Licht bewegt sich für jeden Beobachter mit der Geschwindigkeit c. *Diese Geschwindigkeit c ist eine unerreichbare Höchstgrenze für jede Materie.*

Auf gut Deutsch: Jedes Objekt, jedes Teilchen muss langsamer als das Licht sein.

Deshalb können einige Weltlinien in der Raumzeit prinzipiell gar nicht auftreten:

Aufgabe 3 – Mögliche, unmögliche und Licht-Weltlinien

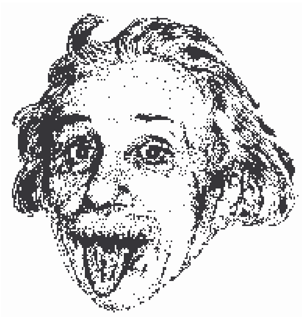
➢ *Betrachte unten die Weltlinien A, B, C, D, E, F, G, H!*
Welche Weltlinien sind überhaupt nicht möglich? Welche Weltlinien sind Licht-Weltlinien?



➢ *Das Objekt mit der Weltlinie D soll nur in dem gezeigten Zeitraum existieren.*
Angenommen, das Objekt D kann Lichtsignale aussenden, solange es existiert.

Schraffiere denjenigen Bereich der Raumzeit grau, den D mit seinen Lichtsignalen erreichen könnte!

➢ *Kann D eine Nachricht an G senden? Kann umgekehrt G eine Nachricht an D schicken?*

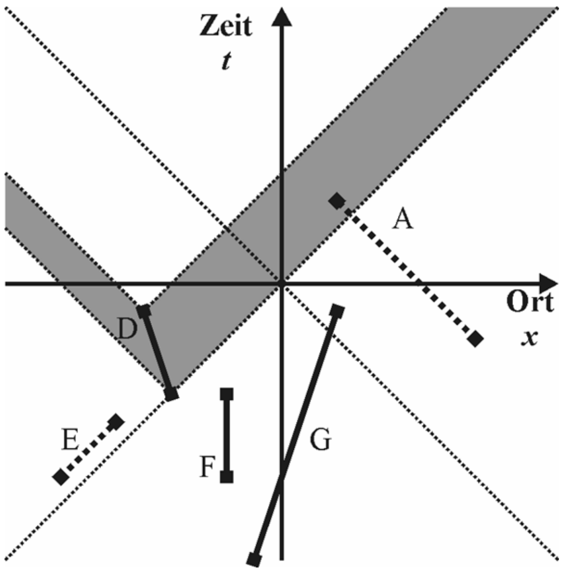


Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 5

Raum und Zeit vereinigen sich zur „Raumzeit“ (III)

Zeit und Raum sind „kausal“ miteinander verknüpft



Frage: Sind die Weltlinien A-H möglich?

Im Raumzeit-Diagramm der letzten Aufgabe sind einige **Weltlinien unmöglich**, da sie Reisen schneller als das Licht repräsentieren würden: B, C und H.

A und E sind **Weltlinien** von **Lichtsignalen**, da die zugehörige Geschwindigkeit gleich $+c$ bzw. $-c$ ist.

Frage: Kann D eine Nachricht an G senden?

D kann während seiner Existenz Lichtsignale aussenden. Diese reisen mit Lichtgeschwindigkeit c. Folglich kann D mit Hilfe von Licht nur den **grau schraffierten Bereich** der Raumzeit erreichen.

D kann an G durch Lichtsignale nicht erreichen.

Frage: Kann G eine Nachricht an D schicken?

Eine analoge Überlegung zeigt sofort:

G kann D sehr wohl mit Hilfe von Lichtsignalen erreichen.

*Die **Information** über ein Ereignis E kann sich in der Raumzeit höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.*

Raum & Zeit sind „kausal“ miteinander verknüpft

Wir befinden uns in Gedanken auf der Erde. Die Bayern und die Berliner sollen synchronisierte Uhren besitzen. Damit wir die kausale Verknüpfung der Raumstruktur erkennen können, müssen wir die Lichtgeschwindigkeit vorübergehend auf 3 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ herabsetzen.

- **Ereignis A**: Um exakt 9.00 Uhr fordert jemand in Straubing, CDU, CSU und SPD sollen sich doch endlich auf eine große Koalition einigen.
- **Ereignis B**: Um exakt 9.02 Uhr setzen die Chefs von CDU, CSU und SPD in Berlin ihre Unterschrift unter den Koalitionsvertrag.

Frage: Kann Ereignis A die Ursache von Ereignis B sein?

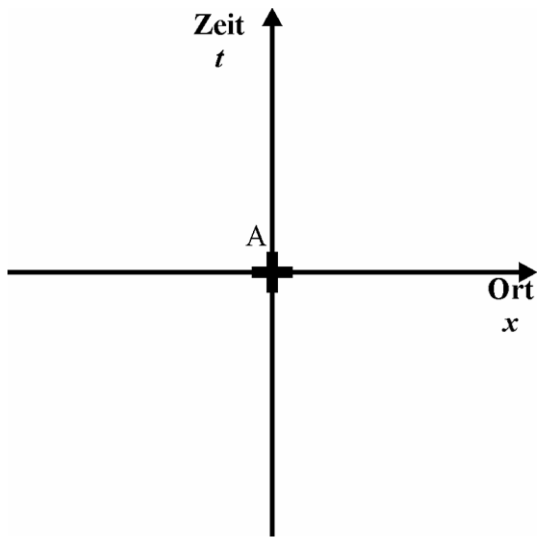
Die schnellste Art, Informationen zu verbreiten, funktioniert über Licht. Da Berlin ca. 600km weit weg von Straubing entfernt ist, braucht Licht 200 s (c =3 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$!), um von Straubing nach Berlin zu gelangen. Um 9.02 Uhr können die Politikerinnen und Politiker in Berlin also keinerlei Kenntnis von Ereignis A haben.

Ereignis A kann Ereignis B nicht verursachen.

Aufgabe 4 – Die „kausale Struktur“ der Raumzeit

*Wir betrachten nun ein Ereignis A, das wir der Einfachheit halber in den **Orts-Ursprung** zum **Zeitpunkt t = 0** setzen.*

➢ *Schraffiere folgende drei Bereiche im Raumzeit-Diagramm unterscheidbar:*



Bereich Z („kausale Zukunft von A“):

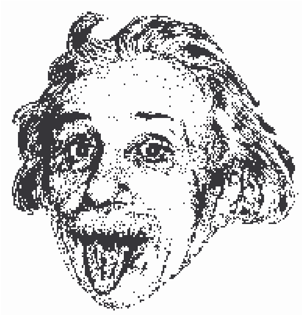
Wo liegen alle Punkte der Raumzeit, die Kenntnis davon haben können, dass A passiert ist?

Bereich V („kausale Vergangenheit von A“):

Wo liegen alle Punkte der Raumzeit, von denen A wissen kann, dass sie passiert sind?

Bereich G („kausale Gegenwart von A“):

Wo liegen die Punkte der Raumzeit mit den Eigenschaften: Sie können <u>weder</u> wissen, dass A passiert ist – <u>noch</u> kann A wissen, dass Ereignisse an diesen Punkten passiert sind?

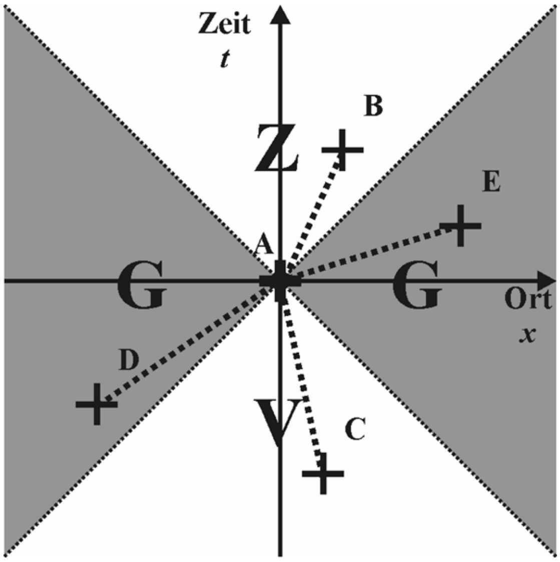


Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 6

Raum und Zeit vereinigen sich zur „Raumzeit“ (IV)

Die „kausale“ Struktur der Raumzeit



- Die **kausale Zukunft des Ereignis A** finden wir, indem wir von A aus Lichtstrahlen ausschicken. Denn schließlich können sich Informationen maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

  Der Bereich in der „Zukunft von A“ zwischen den Lichtstrahlen ist der Bereich der kausalen Zukunft von A (*siehe Bereich* **Z**).

  Alle Ereignisse in diesem Bereich **Z** können vom Ereignis A wissen.

  Das Ereignis A kann deshalb Ursache für alle Ereignisse im Bereich Z sein. Beispielsweise könnte im Diagramm Ereignis B von Ereignis A verursacht sein.

*Der Bereich **Z** ist die **kausale Zukunft** des Ereignisses A.*

- Die **kausale Vergangenheit des Ereignis A** finden wir ähnlich: Wir müssen hierzu lediglich zwei Lichtstrahlen einzeichnen, die das Ereignis A aus der „Vergangenheit“ erreichen. Der Bereich **V** in der „Vergangenheit“ zwischen den Lichtstrahlen ist dann die kausale Vergangenheit von A.

  Das Ereignis A kann von allen Ereignissen im Bereich **V** wissen.

Darum können alle Ereignisse im Bereich **V** die Ursache für das Ereignis A sein. Beispielsweise könnte Ereignis C im Diagramm das Ereignis A ausgelöst haben.

*Der Bereich **V** ist die **kausale Vergangenheit** des Ereignisses A.*

- Die **kausale Gegenwart des Ereignis A** ist dann der übrige Bereich zwischen **kausaler Zukunft** und **kausaler Vergangenheit** – siehe Bereich **G** im Diagramm.

  Alle Ereignisse in Bereich **G** können prinzipiell nichts von Ereignis A wissen.

  Auch anders herum ist es unmöglich:
  Ereignis A kann keine Kenntnis von irgendeinem Ereignis in Bereich **G** haben.

  Ein Ereignis aus dem Bereich **G** und das Ereignis A können deshalb grundsätzlich gegenseitig keine Ursache voneinander sein.

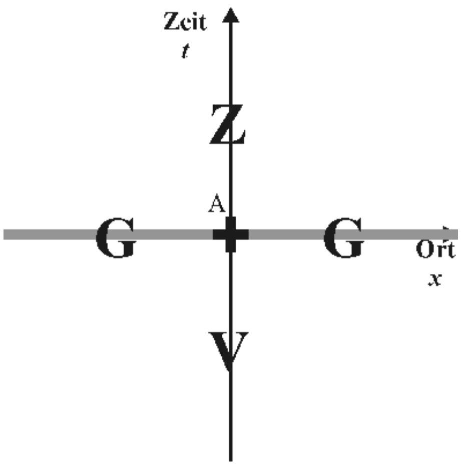
  Beispielsweise müssen die Ereignisse A, D und E kausal unabhängig voneinander passiert sein. A kann von D genau so wenig wissen, wie E von A. Dazu müssten sich die Informationen schneller als das Licht ausbreiten – was nach der SRT unmöglich ist.

*Der Bereich **G** ist die **kausale Gegenwart** des Ereignisses A.*

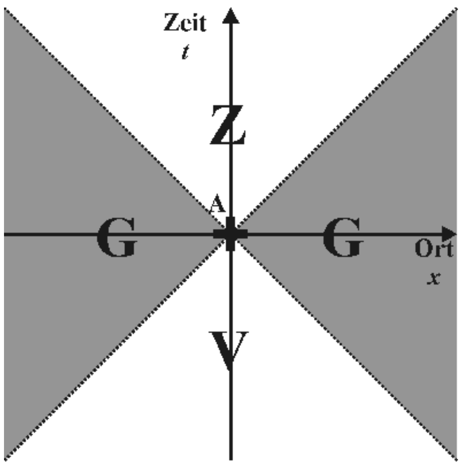
Die Struktur der Raumzeit verändert sich damit grundlegend

Die Begriffe „**Gegenwart**“, „**Vergangenheit**“ und „**Zukunft**“ versteht man in diesem Zusammenhang bereits deutlich anders als vor der **Relativitätstheorie**:

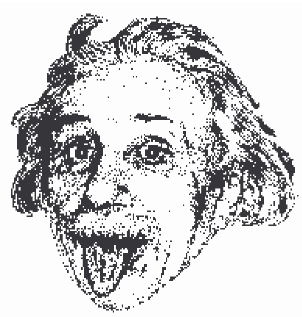
Die klassische Sicht



Die relativistische, kausale Sicht



Klassisch zählte man nur die Ereignisse auf der Ortsachse zur **Gegenwart von A**. Die komplette obere Hälfte der Raumzeit sah man als **Zukunft** und die untere Hälfte als **Vergangenheit** von A. Diese Betrachtungsweise ignoriert aber die endliche Geschwindigkeit des Lichts.



Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

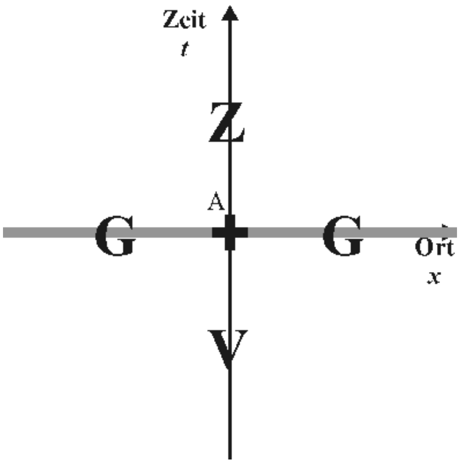
Lektion 7

Raum und Zeit vereinigen sich zur „Raumzeit“ (V)

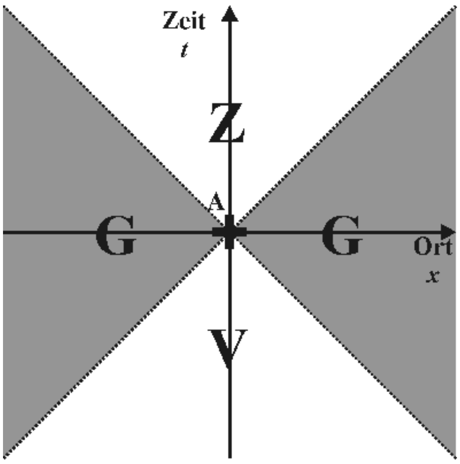
Die Struktur der Raumzeit verändert sich damit grundlegend

Worin besteht aber nun der Vorteil, die Raumzeit derart seltsam in die Bereiche **Zukunft**, **Gegenwart** und **Vergangenheit** des Ereignis A einzuteilen?.

Die klassische Sicht



Die relativistische, kausale Sicht



- **Die klassische Sicht**

  Die **klassische Sicht** geht immer noch vom Konzept der **absoluten Zeit** aus. Das Ereignis A tritt zum Zeitpunkt $t = 0$ ein. Genau die Punkte der Ortsachse gehören im klassischen Sinn zur **Gegenwart von A**.

  Die Punkte auf der Ortsachse sind all diejenigen, die ebenfalls zur Zeit $t = 0$ gehören.

  Nun wissen wir aber aus der SRT, dass die **Zeitmessung** stets vom **Beobachter** und seinem Bewegungszustand abhängt! Folglich würde gelten:

*In der **klassischen Sicht** hängt es vom **Beobachter** ab, ob ein Ereignis X zur „**Gegenwart von A**" gehört. Die Begriffe „**Zukunft**", „**Vergangenheit**" und „**Gegenwart**" wären in der klassischen Sicht **beobachterabhängig**!*

- **Die relativistische Sicht**

Die Fragestellung

„Gehört ein Ereignis X zur Zukunft, zur Gegenwart oder zur Vergangenheit von A?"

stellt sich für die **Relativitätstheorie** völlig anders dar:

Im Prinzip muss man zur Beantwortung der Frage **Lichtstrahlen** in das Raumzeit-Diagramm einzeichnen, die vom Ereignis A ausgehen bzw. beim Ereignis A eintreffen. Diese Lichtstrahlen zerlegen die Raumzeit in die Bereiche **Zukunft**, **Gegenwart** und **Vergangenheit von A**.

Nun gilt aber die...:

Hauptforderung der SRT:
Die Lichtgeschwindigkeit ist für jeden Beobachter stets gleich groß!

Folglich wird **jeder beliebige Beobachter** bei der Frage, ob X zur Zukunft, zur Gegenwart oder zur Vergangenheit von A gehört, zur **gleichen Antwort** kommen!

*In der **relativistischen, kausalen Sicht** sind*
*die Begriffe „**Zukunft**", „**Vergangenheit**" und „**Gegenwart**"*
*endlich **unabhängig** vom jeweiligen **Beobachter**!*

Die Konsequenzen daraus für Hermann Minkowski (1910)

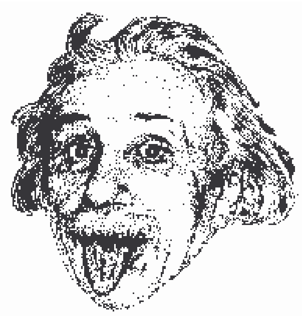
Der **Mathematiker Hermann Minkowski** erkannte aus Einsteins SRT, dass die Frage:

„Gehört X zur Zukunft, Gegenwart oder Vergangenheit von A?"

nur mit Hilfe des **Lichts** eindeutig und beobachterunabhängig zu beantworten ist.

Um diese Frage zu beantworten, muss man aber stets **Raum und Zeit zugleich** betrachten. Denn man muss ja untersuchen, ob X und A Informationssignale austauschen können.

Minkowski hat deshalb in seiner wissenschaftlichen Arbeit **Raum und Zeit** mathematisch **untrennbar** miteinander verbunden. Aber dazu mehr in den folgenden Lektionen!



Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

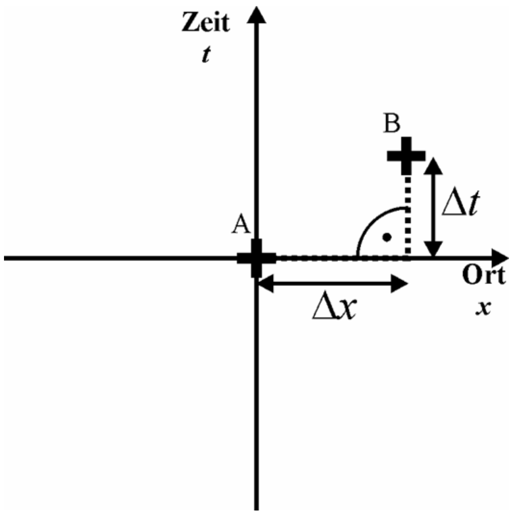
Lektion 8

Der relativistische Abstand (I)

In der **klassischen Physik** ist man gewöhnt, **zeitliche** und **räumliche Abstände** getrennt von einander zu betrachten.

Abstände in der klassischen Physik

Nehmen wir an, das **Ereignis A** findet zum Zeitpunkt $t_A = 0$ und am Ort $x_A = 0$ statt.
Dann müsste man dieses Ereignis A im Ursprung unseres Raum-Zeit-Diagramms einzeichnen. Außerdem zeichnen wir noch ein **Ereignis B** ein.



In der **klassischen Physik** würde man den **zeitlichen Abstand Δt** und den **örtlichen Abstand Δx** der Ereignisse A und B jeweils separat angeben.

Beide Angaben sind jedoch eigentlich sinnlos:

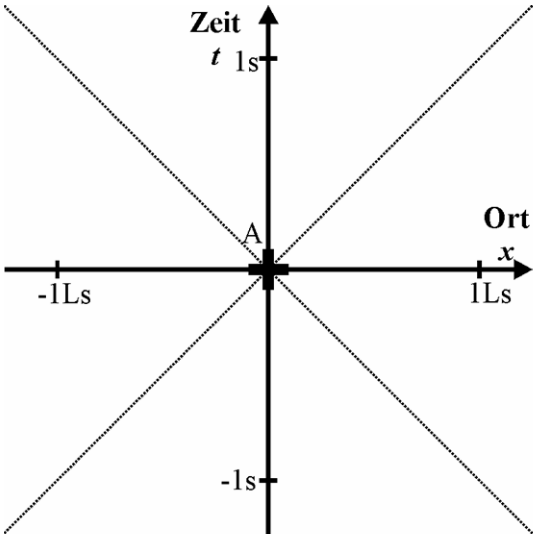
Sowohl Zeit- als auch Ortsangaben hängen ja vom Beobachter ab! Verschieden schnell bewegte Beobachter kommen deshalb zu unterschiedlichen Resultaten für die Abstände Δt, Δx.

> *Die **klassischen Abstände Δt** (zeitlich) und **Δx** (örtlich) zwischen zwei Ereignissen A und B sind stets **abhängig** vom jeweiligen **Beobachter**.*
> *Verschiedene Beobachter können zu verschiedenen Ergebnissen für Δt und Δx kommen.*

Der relativistische Abstand zwischen zwei Ereignissen A und B

Tatsächlich lässt sich das Problem des **Abstands zweier Ereignisse A und B** nur in Hermann Minkowskis **Raumzeit** überzeugend lösen. Und zwar misst man nicht mehr zeitliche und örtliche Abstände separat – sondern man behandelt beide gleichzeitig:

Als **relativistischen Abstand** zwischen den Ereignissen A und B!



Die Achsen im Raumzeit-Diagramm

Für Hermann Minkowski ergab sich zuerst das Problem dass die Größen auf der **Ortsachse** eine ganz andere **Einheit** haben (m, Meter) als die Angaben auf der **Zeitachse** (s, Sekunde). Wie sollte man dann Zeit- und Ortsabstand zu einem einzigen relativistischen Raumzeit-Abstand kombinieren können?

Minkowski wählt auf der ***Ortsachse*** *die* ***Grundeinheit Ls (Lichtsekunde)*** *statt m (Meter).*
1 Ls (1 Lichtsekunde) ist der Weg, den das Licht in einer Sekunde zurücklegt.
1 Ls = 300000 km

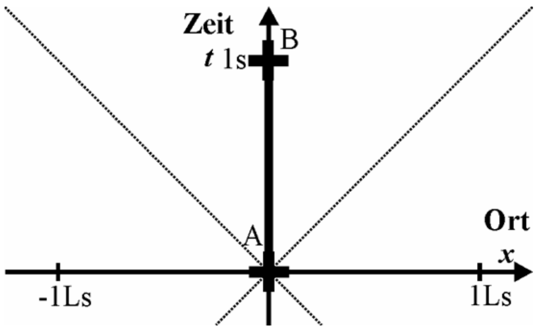
Dadurch bekamen Zeit- und Ortsachse immerhin „vergleichbare" Einheiten. Außerdem:

Lichtstrahlen *verlaufen in solchen Diagrammen immer im* ***45°-Winkel*** *zu den Achsen.*

„Zeitartige" Abstände

Der Begriff des **relativistischen Abstands** zwischen zwei Ereignissen A und B ist so ungewöhnlich, dass wir ihn schrittweise entwickeln müssen.

Wir betrachten zunächst ein **Ereignis B**, das **in der Zukunft** von Ereignis A - aber **am gleichen Ort** wie Ereignis A stattfindet.

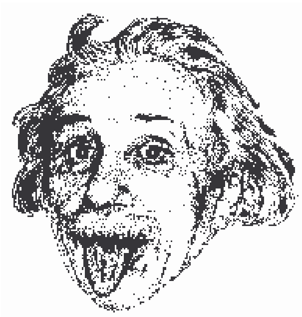


Wie definiert sich hier ein sinnvoller **relativistischer Raumzeit-Abstand** zwischen A und B?

Nun – wir können davon ausgehen, dass wir beim **Ereignis A** eine **Uhr** auf 0s zurückgestellt haben. Wir müssen diese Uhr einfach nur auf dem Ort von A stehen lassen. Schließlich ist auch das **Ereignis B** am gleichen Ort wie das Ereignis A.

Wenn dann **Ereignis B** eintritt, zeigt die besagte Uhr: 1s.

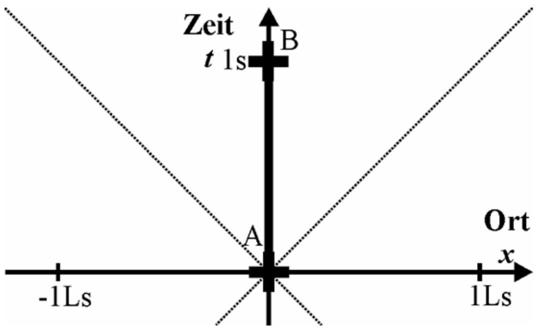
Im obigen Beispiel haben die beiden Ereignisse A und B den ***Raum-Zeit-Abstand 1s****.*
*Da dieser Abstand mit einer Uhr gemessen werden kann, heißt der Abstand „****zeitartig****".*



Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 9

Der relativistische Abstand (II)



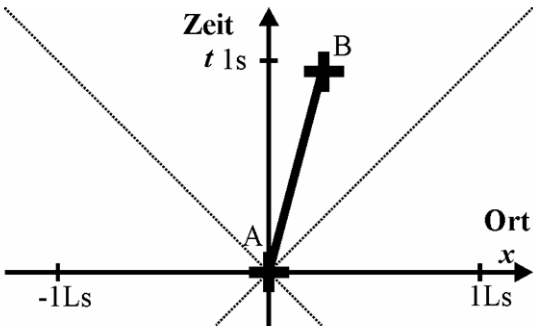
„Zeitartige“ Abstände

Wenn die Ereignisse A und B am gleichen Ort stattfinden, können wir mit einer Uhr den Raum-Zeit-Abstand zwischen A und B messen. Dazu müssen wir die Uhr einfach nur am Ort ruhen lassen.

> ***Raum-Zeit-Abstände**, die man mit einer **Uhr** messen kann, nennt man „**zeitartig**“.*
> *Sie werden in der **Einheit s (Sekunde)** angegeben.*

Welche Raum-Zeit-Abstände sind „zeitartig“?

Betrachte die Situation rechts:



Hier ist **Ereignis B** nicht mehr am gleichen Ort wie **Ereignis A**. Dennoch gehört Ereignis B zur „Zukunft“ von Ereignis A. Denn es ist möglich, auf der Weltlinie von Ereignis A nach Ereignis B zu reisen: Die Reise wäre **langsamer als das Licht**.

Es ist möglich, eine **Uhr** vom Ort des **Ereignis A** zum Ort des **Ereignisses B** zu schicken. Bei jedem **Ereignis B**, das in Minkowskis „**kausaler Zukunft**“ oder „**Vergangenheit**“ von **Ereignis A** liegt, lässt sich mit Hilfe einer einer **Uhr** der **Raum-Zeit-Abstand zwischen A und B** messen.

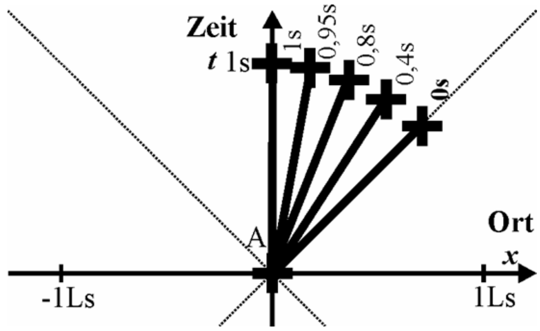
> *Alle Ereignisse B, die in der **kausalen Zukunft** oder **Vergangenheit** von A liegen, haben einen „**zeitartigen**“ **Raum-Zeit-Abstand** zu Ereignis A.*

Jetzt aber sagt die SRT:

Bewegte Uhren laufen langsamer als ruhende Uhren.

Folglich würde eine bewegte Uhr auf der Reise von A nach B langsamer laufen – und eine geringere, vergangene Zeit als 1s anzeigen!

Der Effekt ist umso stärker, je schneller die Uhr auf der Weltlinie von A nach B reist.



Betrachte die Zeichnung rechts: Die **45°-Diagonale** selbst stellt ja die **Lichtgeschwindigkeit** dar.

Je **näher** die Weltlinie A-B dieser **Licht-Weltlinie** kommt, desto **langsamer** würde die Uhr auf der Reise von A nach B laufen.

Auf der **Licht-Weltlinie** selbst (45°!) würde die Uhr mit **Lichtgeschwindigkeit** von A nach B reisen. Auf dieser fiktiven Reise würde die Uhr endgültig stehen bleiben: 0s Abstand!

***Zwei Ereignisse**, die auf einer gemeinsamen **45°-Licht-Weltlinie** liegen,*
*haben den **relativistischen Abstand 0**.*

Insgesamt gelten diese Regeln für „zeitartige" Abstände in der Raumzeit:

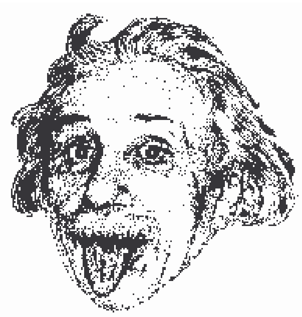
*Der **relativistische Abstand** zwischen zwei Ereignissen A und B...*

- *...ist „**zeitartig**", wenn B in der „**kausalen Zukunft**"*
  *oder in der „**kausalen Vergangenheit**" von A liegt.*
- *...ist umso **geringer**, je näher die **Weltlinie A-B** an eine **Licht-Weltlinie** kommt.*
- *...beträgt **0**, wenn die **Weltlinie A-B** eine **Licht-Weltlinie** ist.*

*„Zeitartige" Abstände werden in der **Einheit s (Sekunde)** angegeben.*

Diese Definition des Abstandes zwischen zwei Ereignissen A und B ist endlich unabhängig vom Beobachter.
Es ist einfach nur notwendig, eine **Uhr** von A nach B auf die Reise zu schicken. Hier bewertet nicht mehr ein Beobachter, sondern eine reisende Uhr den Abstand zwischen A und B.

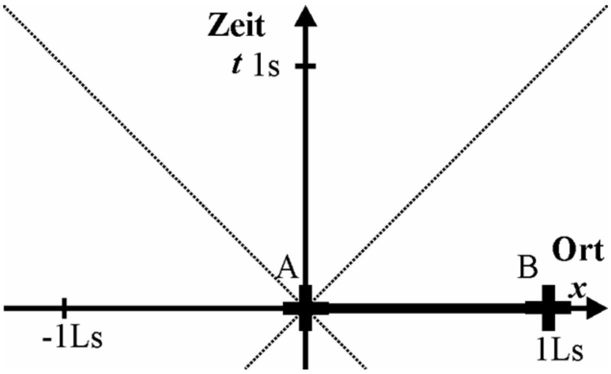
*Der **relativistische Abstand** zwischen A und B ist **beobachterunabhängig**!*



Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 10

Der relativistische Abstand (III)



„Raumartige" Abstände

Betrachte nun die Weltlinie zwischen A und B, die links in die Raumzeit eingezeichnet ist. Hier funktioniert die Messweise mit der reisenden Uhr nicht, um den relativistischen Abstand zwischen A und B zu bestimmen.

Wir können **keine Uhr** von A nach B (oder umgekehrt) schicken, denn diese **Uhr müsste schneller als das Licht reisen**. Der Abstand zwischen A und B ist **nicht „zeitartig"**.

Aber für den Abstand zwischen A und B gibt es eine wesentlich einfachere Interpretation:

Der Schnappschuss-Beobachter

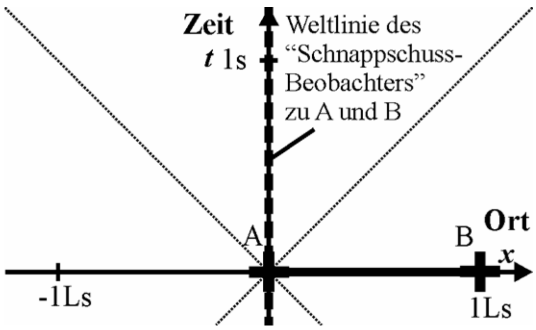
In obiger Situation finden die Ereignisse A und B „**zeitgleich**" statt.

Aber - was bedeutet „*A und B finden zeitgleich statt*" in der Welt der Relativitätstheorie?

Jede Zeitmessung ist beobachterabhängig. Deshalb müssen wir natürlich auch dazu sagen, **für welchen Beobachter** die Ereignisse A und B „zeitgleich" stattfinden.

Hier in diesem Beispiel ist es derjenige Beobachter, der in diesem Bezugsystem selbst **ruht**. Die **Weltlinie** dieses Beobachters ist rechts eingezeichnet.

> *Wir nennen diesen Beobachter „**Schnappschuss-Beobachter zu A und B**", denn genau für ihn finden A und B „zeitgleich" statt.*



Für diesen Schnappschuss-Beobachter haben die Ereignisse A und B einen rein **„raumartigen“ Abstand**. Der Schnappschuss-Beobachter zu A und B kann deshalb einfach ein - eventuell sehr langes – Lineal anlegen und diesen Abstand wie allgemein bekannt messen.

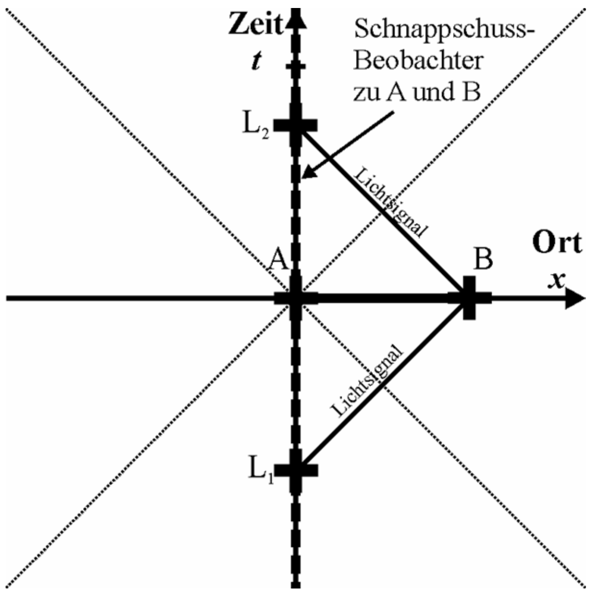
Die Einheit, mit der raumartige Raum-Zeit-Abstände angegeben werden, ist deshalb m (Meter) - bzw. in der Relativitätstheorie üblicher: Ls (Lichtsekunde).

Bekanntlich ist ja: 1 Ls = 300.000 km = 300.000.000 m.

> ***Raum-Zeit-Abstände*** *zwischen Ereignissen, die beide in der* ***kausalen Gegenwart*** *liegen, können* ***nicht*** *mit der Methode der „reisenden Uhr“ ermittelt werden.*
>
> *Diese Uhr müsste nämlich zwischen A und B schneller als das Licht reisen.*
>
> *Stattdessen gibt es* ***zu zwei Ereignissen A und B*** *stets genau einen „****Schnappschussbeobachter****“. Für diesen Beobachter finden A und B „zeitgleich“ statt. Er kann deshalb den Abstand zwischen A und B schlicht mit einem Lineal messen.*
>
> ***Raum-Zeit-Abstände****, die ein „Schnappschussbeobachter“ einfach mit dem Lineal messen kann, nennt man „****raumartig****“. Sie werden in der* ***Einheit Ls (Lichtsekunde)*** *angegeben.*

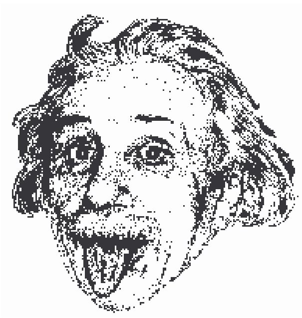
Was bedeutet „A und B finden zeitgleich statt“ genau?

Die Aussage „*A und B sind zeitgleich*“ ist eigentlich ungenau. Denn Zeitmessung ist beobachterabhängig. Die einzige **absolute Konstante** ist die **Lichtgeschwindigkeit**. Deshalb müssen wir „*A und B sind zeitgleich*“ mit Hilfe des Lichts definieren!



Der oben gezeigte Beobachter sendet hierzu zum (passenden!) Zeitpunkt $\mathbf{L_1}$ ein Lichtsignal nach **B** aus. Sobald dieses Lichtsignal **B** erreicht, wird es zum Beobachter zurück reflektiert. Zum Zeitpunkt $\mathbf{L_2}$ trifft es wieder beim Beobachter ein.

> ***A und B*** *finden für einen* ***Beobachter „zeitgleich“*** *statt, wenn die Ereignisse* $\boldsymbol{L_1}$***-A*** *und* ***A-***$\boldsymbol{L_2}$ *für den* ***Beobachter*** *genau im* ***gleichen zeitlichen Abstand*** *stattfinden!*

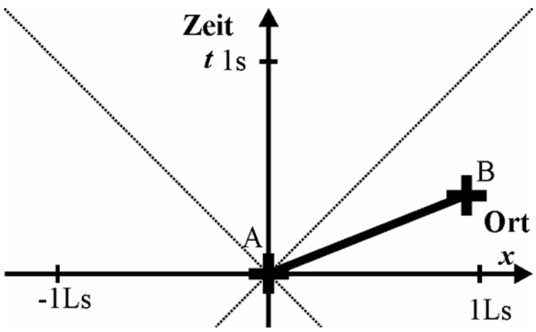


Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 11

Der relativistische Abstand (IV)

Wie finde ich den Schnappschuss-Beobachter zu zwei Ereignissen A und B?

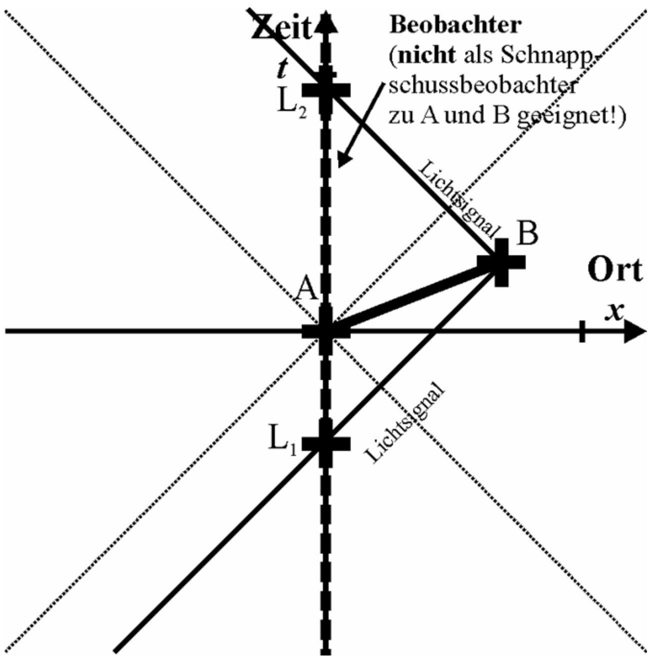


Links siehst Du zwei Ereignisse A und B, bei denen der **ruhende** Beobachter **nicht** als Schnappschuss-Beobachter taugt. Denn für einen ruhenden Beobachter wären A und B nicht „zeitgleich“.

Die Lineal-Mess-Methode benötigt aber einen passenden „Schnappschussbeobachter" zu A und B.

Aber auch hier lässt sich genau ein Schnappschussbeobachter zu A und B finden, für den beide Ereignisse „zeitgleich“ stattfinden – und zwar mit der Lichtsignal-Methode.

Hierzu zeichnen wir zwei Lichtsignale ein, wobei eines bei B eintrifft und das andere von B reflektiert wird.



Wie man sieht, ist der **ruhende Beobachter kein geeigneter Schnappschussbeobachter zu A und B**, weil die zeitlichen Abstände L_1-A und A-L_2 nicht gleich sind. Für den ruhenden Beobachter sind A und B nicht „zeitgleich“ (siehe Diagramm rechts).

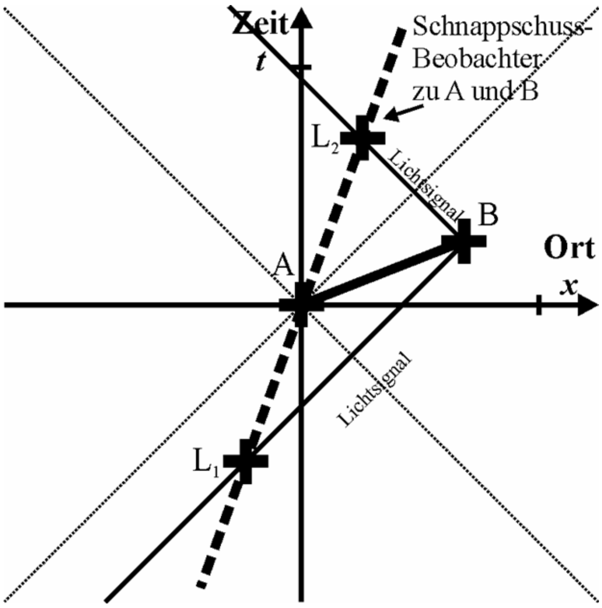
Die Lösung besteht nun darin, statt eines ruhenden Beobachters einen **geeignet bewegten Beobachter** zu verwenden.

Hierzu **drehen** wir die **Weltlinie des Beobachters** solange um A, ...

...bis die **zeitlichen Abstände L_1–A** und **A–L_2** tatsächlich **gleich groß** sind.

Dieser **bewegte Beobachter** ist dann tatsächlich ein geeigneter **Schnappschussbeobachter** zu den Ereignissen A und B. Denn für diesen Beobachter finden A und B „zeitgleich" statt!

> *Zu zwei **Ereignissen A und B**, die beide jeweils in der **kausalen Gegenwart** stattfinden, lässt sich stets **genau ein Schnappschussbeobachter** finden.*



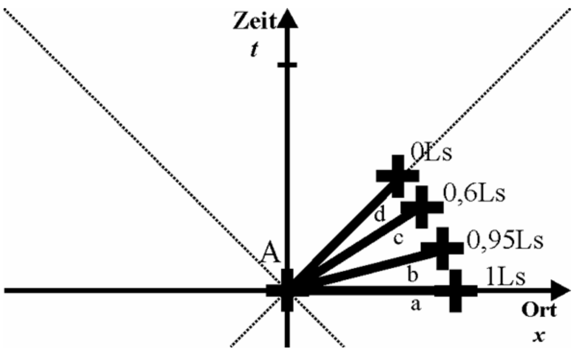
Für diesen **Schnappschussbeobachter** finden A und B „**zeitgleich**" statt. Folglich kann dieser Beobachter durch **Anlegen eines Lineals** den Abstand zwischen A und B direkt messen!

> *Zwei **Ereignisse A und B**, die beide in der **kausalen Gegenwart** stattfinden, haben einen **„raumartigen" Raum-Zeit-Abstand**. Er wird in der Einheit **Ls (Lichtsekunde)** angegeben.*

„Raumartige" Abstände

Mit Hilfe dieser **Schnappschussbeobachter** lassen sich also auch **„raumartige" Abstände** in der Raumzeit messen.

Betrachte die vier Beispiele a, b, c und d rechts.



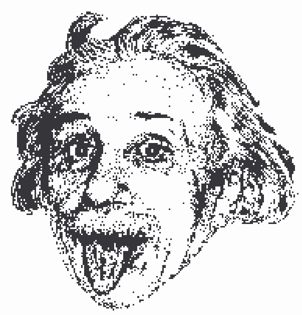
Man kann sich überlegen, dass im Fall a der Schnappschussbeobachter ruht. Sagen wir, im Fall a beträgt der Abstand 1Ls.

Im Fall b ist der Schnappschussbeobachter bewegt. Wegen des Effekts der **Längenkontraktion** ergibt sich hier bei der Messung ein geringerer Abstand, zum Beispiel: 0,95 Ls.

Wenn man die Sache genau durchdenkt, erkennt man, dass sich der Schnappschussbeobachter im Fall c schneller bewegt als in Fall b. Die Längenkontraktion ist noch stärker: 0,6 Ls!

Im Fall d liegt eine Licht-Weltlinie vor. Hier ist die Längenkontraktion perfekt: 0 Ls.

> *Der **„raumartige" Raum-Zeit-Abstand** zwischen A und B ist umso geringer, je näher die **Weltlinie A-B** an eine **Licht-Weltlinie** kommt.*



Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

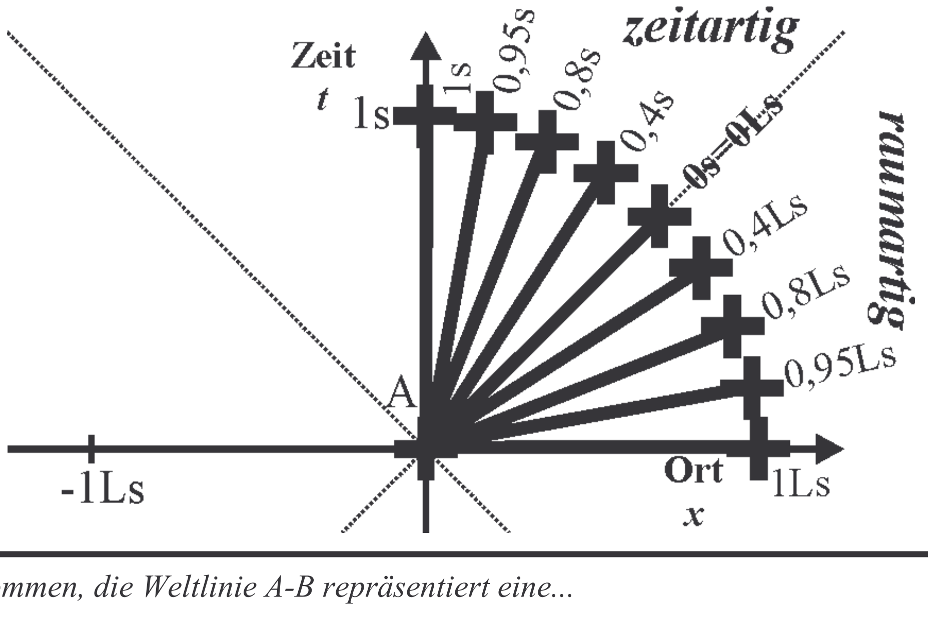
Lektion 12

Der relativistische Abstand (V)

Wir haben nun alle Regeln beieinander, um **relativistische Abstände** zwischen zwei Ereignissen A und B in der vierdimensionalen Raum-Zeit angeben zu können. Bemerkenswert ist hierbei, dass der relativistische Abstand zwischen A und B „**zeitartig**“ oder aber „**raumartig**“ sein kann. So etwas gibt es nur in Hermann Minkowskis 4D-Raum-Zeit.

Die Regeln für den relativistischen Abstand

Gegeben seien zwei Ereignisse A und B in der Raum-Zeit.
Der Einfachheit halber liege das Ereignis A im Ursprung.



Angenommen, die Weltlinie A-B repräsentiert eine...

- ***...Reise langsamer als das Licht**, so ist der Abstand A-B „**zeitartig**“.*
  Man kann den Abstand messen, indem man eine Uhr zwischen A und B auf die Reise schickt und diese Uhr die zeitliche Dauer der Reise messen lässt.
  *Die Einheit zeitartiger Abstände ist **s (Sekunden)**.*

- *...**Reise schneller als das Licht**, so ist der Abstand A-B „**raumartig**“.*
  Man kann den Abstand bestimmen, indem ein geeigneter Schnappschuss-Beobachter den Abstand A-B direkt mit dem Lineal misst.
  *Die in der ART übliche Einheit raumartiger Abstände ist **Ls (Lichtsekunden)**.*
  (1Ls = 300.000 km = 300.000.000 m)

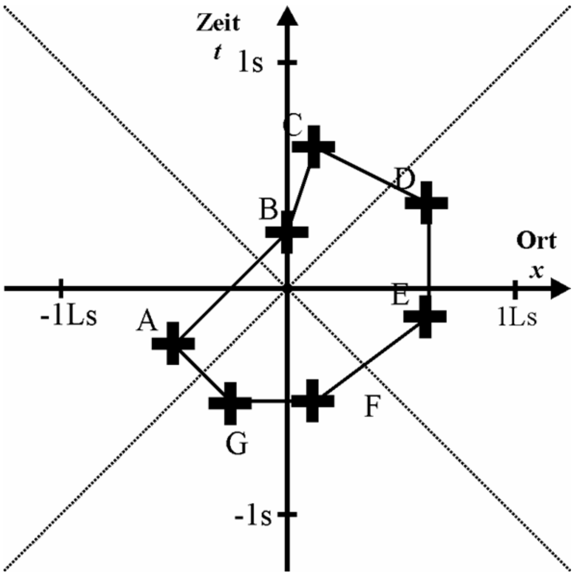
*Wenn die Weltlinie A-B direkt eine **Licht-Weltlinie** repräsentiert, ist der relativistische Abstand zwischen A und B gleich **Null (0 s oder 0 Ls)**.*

*Der Abstand zwischen A und B ist deshalb tendenziell **kleiner**, je **ähnlicher** die Weltlinie A-B einer **Licht-Weltlinie** ist (→Zeitdilatation, →Längenkontraktion).*

Aufgabe 5 - Der relativistische Abstand zwischen Ereignissen (Übung)

Im rechts gezeigten Raum-Zeit-Diagramm ist eine geschlossene Kette A-B-C-D-E-F-G-A von Ereignissen gezeigt. Wir interessieren uns nacheinander für den relativistischen Abstand zwischen A und B, zwischen B und C usw.

Diese Abstände werden kurz mit d(A, B), d(B, C), ..., d(F, G) und d(G, A) bezeichnet.

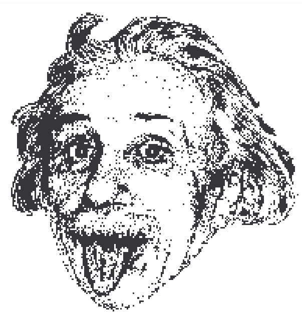


➢ *Welche dieser Abstände d(...) sind raumartig, welche davon sind zeitartig bzw. bei welchen Abständen gilt: d(...) = 0?*

***Beispiele**: d(A, B) = 0, denn die Weltlinie A-B ist eine Lichtwelt-Linie (45°-Steigung!).*
d(B, C) ist zeitartig, denn die Weltlinie B-C ist ein Reise langsamer als das Licht.

➢ *Jemand behauptet, dass gilt: d(E, F) = d(F, G).*
Überlege und begründe Deine Antwort: Ist das prinzipiell überhaupt möglich?

➢ *Jemand behauptet, dass gilt: d(B, C) = d(D, E).*
Überlege und begründe Deine Antwort: Ist das prinzipiell überhaupt möglich?

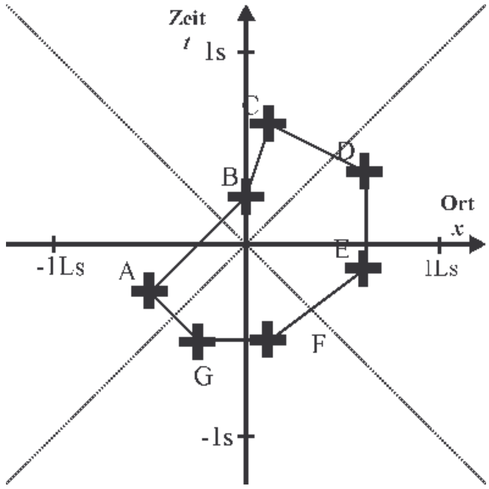


Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 13

Der relativistische Abstand zwischen Ereignissen (Lösung)

Im Raum-Zeit-Diagramm rechts ist eine geschlossene Kette A-B-C-D-E-F-G-A von Ereignissen gezeigt. Deren Abstände werden kurz mit d(A, B), d(B, C),... bezeichnet.



➢ *Welche dieser Abstände d(...) sind raumartig, welche sind zeitartig bzw. bei welchen Abständen gilt: d(...) = 0?*

- *d*(A, B) = 0, und *d*(G, A) = 0. Die zugehörigen Weltlinien sind Lichtwelt-Linien.
- *d*(B, C) und *d*(D, E) sind zeitartig.
  Denn die jeweiligen Weltlinien sind Reisen langsamer als das Licht.
- *d*(C, D), *d*(E, F) und *d*(F, G) sind raumartig.
  Deren Weltlinien wären Reisen schneller als das Licht.

➢ *Jemand behauptet, dass gilt: d(E, F) = d(F, G). Ist das prinzipiell überhaupt möglich?*

- Das ist durchaus möglich. Beide Abstände sind raumartig. Im Raumzeit-Diagramm sind die Ereignisse E, F <u>zwar weiter voneinander entfernt</u> eingezeichnet als F, G. <u>Allerdings</u> wirkt bei der Weltlinie E-F die <u>Längenkontraktion</u> wesentlich <u>stärker</u> als bei F-G. Dadurch kann sehr wohl *d*(E, F) = *d*(F, G) sein.

➢ *Jemand behauptet, dass gilt: d(B, C) = d(D, E). Ist das prinzipiell überhaupt möglich?*

- Das ist nicht möglich. Beide Abstände sind zeitartig. Die Ereignisse B, C sind im Raumzeit-Diagramm <u>näher beieinander</u> eingezeichnet als die Ereignisse D, E. Bei der Weltlinie B-C wirkt dann <u>noch dazu</u> die <u>Zeitdilatation stärker</u>. Dies verkürzt den relativistischen Abstand B-C zusätzlich. Also ist mit Sicherheit: *d*(B, C) < *d*(D, E).

Eine Erinnerung an Newtons Bewegungsgesetze

Sir Isaac Newton hat am Ende des 17. Jahrhunderts drei weltweit berühmte Gesetze aufgestellt. Mit Hilfe dieser Gesetze gelang es, die **Bewegung** eines jeden Gegenstands vorherzusagen, sofern nur alle **Kräfte** bekannt sind, die auf diesen Gegenstand wirken.

Das **erste Gesetz** ist der **Trägkeitssatz**. Er besagt:

Wenn auf einen Gegenstand keine Kraft wirkt, so bleibt er in Ruhe oder er bewegt sich geradlinig mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiter.

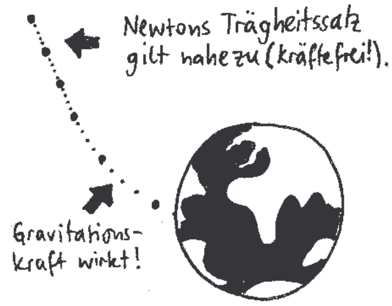
Der Satz bedeutet Folgendes:

1. *Wenn sich ein Körper in Ruhe befindet und keine Kraft auf ihn wirkt, dann bleibt er auch in Ruhe.*
2. *Wenn sich ein Körper bereits bewegt und dabei keine Kraft auf ihn wirkt, dann bewegt er sich unverändert mit gleicher Richtung und gleicher Geschwindigkeit immer weiter.*

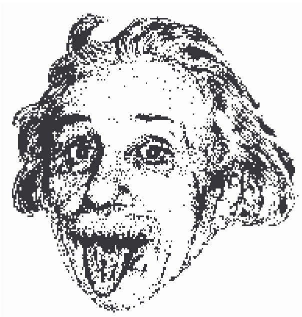
Newtons **Trägheitssatz** wurde viele Jahrzehnte lang bezweifelt. Denn die Alltagserfahrung zeigt ja, dass alle Gegenstände irgendwann stehen bleiben (z.B. obige Billardkugel).
Ist das nicht ein Widerspruch zum Trägheitssatz?

Nein! Denn beispielsweise wirkt bei obiger rollender Billardkugel ständig eine bremsende Reibungskraft durch den Kontakt mit dem Untergrund!

Je <u>weniger</u> Reibungskräfte auftreten, desto <u>besser</u> gilt Newtons Trägheitssatz. Wenn man die Billardkugel mitten im Weltall aus dem Fenster eines Raumschiffs werfen würde, dann wirkt nahezu keine Kraft mehr auf die Kugel – und sie wird sich tatsächlich Tausende von Kilometer weit geradlinig mit unveränderter Geschwindigkeit weiter bewegen!



Die Billardkugel würde erst dann von ihrer gleichförmigen Bahn abweichen, wenn eine Kraft auf sie wirkt. Beispielsweise könnte die Kugel in die Nähe eines Planeten kommen:
Die Gravitationskraft würde auf die Kugel Einfluss nehmen und diese von der gleichförmigen Bahn ablenken!



Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

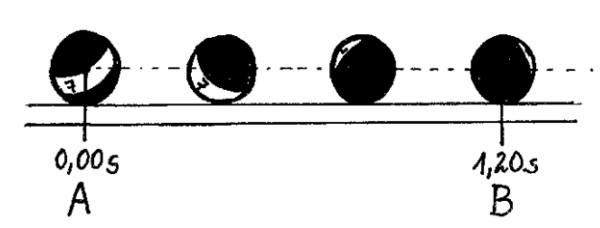
Lektion 14

Das wichtigste Bewegungsgesetz in Einsteins ART

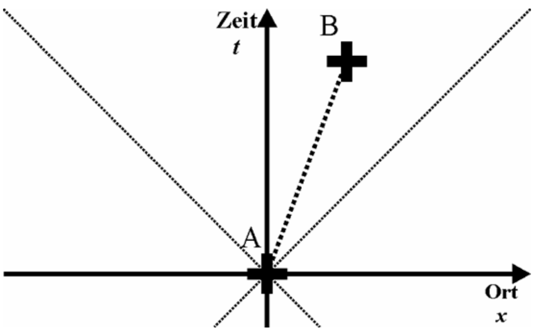
Isaac Newtons **Trägkeitssatz** besagt also:

> *Wenn auf einen Gegenstand keine Kraft wirkt, so bleibt er in Ruhe oder er bewegt sich geradlinig mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiter.*

Diesen Trägheitssatz gibt es nicht mehr in Albert Einsteins **Allgemeiner Relativitätstheorie (ART)**. Der Physiker hat ihn durch ein völlig neues Bewegungsgesetz ersetzt.



Betrachten wir dazu die rollende Billardkugel und nehmen einfach mal an, dass sie sich **kräftefrei** bewegt. In der ART müssen wir ein **Raumzeit-Diagramm** des Vorgangs zeichnen. Hierzu sehen wir uns die **Ereignisse** A und B genauer an.



Wir müssen uns allerdings daran erinnern, dass die Ereignisse A und B jeweils sowohl die Information über den **Ort** als auch über den **Zeitpunkt** der Situation umfassen!

Zeichnen wir A und B in ein Raumzeit-Diagramm ein (siehe links).

Da sich ein realer Gegenstand von A nach B bewegt (langsamer als das Licht),
muss d(A, B) **zeitartig** sein.

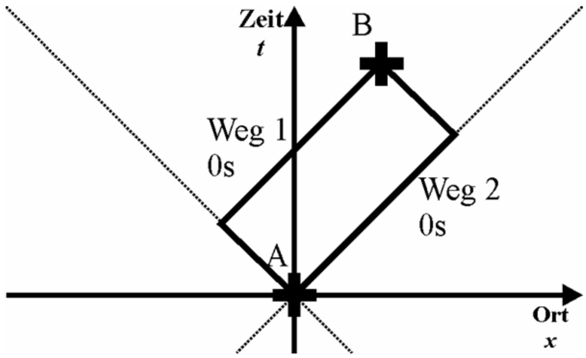
Die gestrichelte Linie von A nach B ist die Weltlinie, auf der sich die Billard-Kugel bewegen würde. In Einsteins ART ergibt sich diese Bewegungs-Weltlinie von A nach B aber nach einem ganz anderen Prinzip.

Die relativistischen Längen verschiedener Wege von A nach B (I)

Einstein untersuchte nun die **relativistischen Längen** verschiedener Wege von A nach B. Da A und B einen **zeitartigen Abstand** haben, kann man eine **Uhr** mit auf die Reise von A nach B schicken. Diese Uhr ermittelt dann die relativistische Länge des jeweiligen Wegs von A nach B.

Die zwei relativistisch-kürzesten Wege von A nach B:

Wir erinnern uns daran, dass alle Weltlinien mit 45°-Steigung die **relativistische Länge 0** haben. Sie repräsentieren ja Licht-Weltlinien. Folglich sind die zwei Wege A→B die relativistisch-kürzest möglichen (siehe rechts).



Im Diagramm sind die beiden Wege A→B eingezeichnet und ihre **relativistische Länge (0s)** angegeben.

Diese zwei Wege A→B sind freilich nicht möglich für einen realen Gegenstand, da dieser sich mit **Lichtgeschwindigkeit** bewegen müsste.

Aber die Überlegung erleichtert das Verständnis des Folgenden:

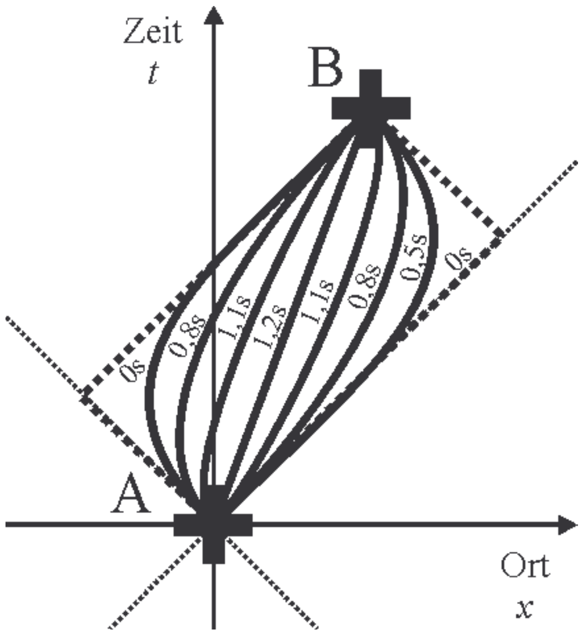
Die relativistische Länge aller möglichen Wege von A nach B im Vergleich:

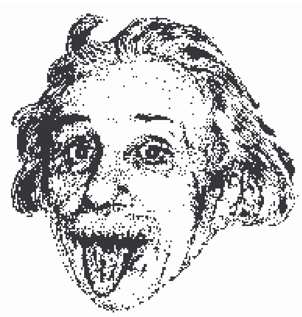
Die verschiedenen möglichen Wege A→B haben verschiedene relativistische Längen.

Und da fiel Albert Einstein etwas auf: Derjenige geradlinige Weg von A nach B, den die Billard-Kugel tatsächlich nehmen würde, besitzt die **längstmögliche** relativistische Länge!

Und somit lautete der Ersatz für Newtons Trägheitssatz in Einsteins ART ganz einfach:

> ***Bewegungsgesetz für kräftefreie Körper****: Die Weltlinie eines kräftefreien Körpers zwischen zwei Ereignissen ist genau so beschaffen, dass deren relativistische Länge möglichst groß ist.*





Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 15

Das wichtigste Bewegungsgesetz in Einsteins ART (II)

Der Ersatz für Newtons Trägheitssatz lautet in Einsteins ART also:

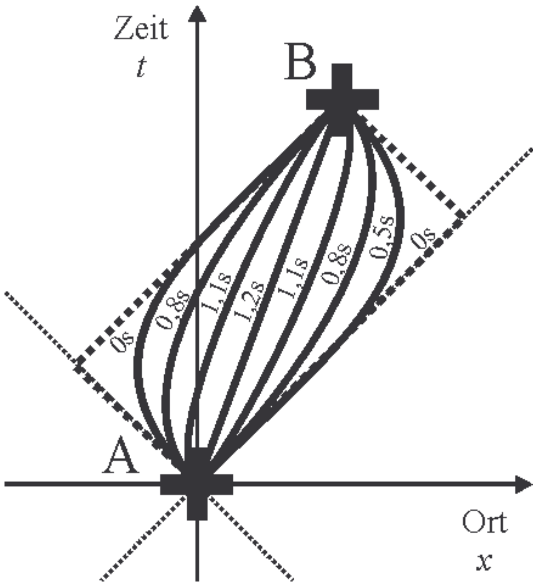
***Bewegungsgesetz für kräftefreie Körper**: Die Weltlinie eines kräftefreien Körpers zwischen zwei Ereignissen ist genau so beschaffen, dass deren relativistische Länge möglichst groß ist.*

Warum ist dieses Bewegungsgesetz so kompliziert formuliert?

Wenn wir nämlich die möglichen Weltlinien zwischen den Ereignissen A und B betrachten, wird klar:

Die Weltlinie zwischen A und B, deren **relativistische Länge möglichst groß** ist, ist einfach die **gerade Verbindung** von A nach B.

Warum Einstein forderte dann Einstein nicht einfach: „*Die Weltlinie eines kräftefreien Körpers zwischen zwei Ereignissen ist deren gerade Verbindung*.“ ?

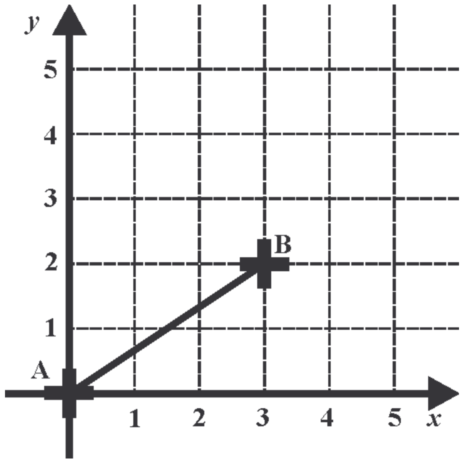


Das liegt daran, dass Albert Einstein die Möglichkeit in seine ART eingebaut hat, dass sich die Raumzeit „**verkrümmt**“!

Und in einer „verkrümmten“ Raumzeit ist die Weltlinie mit der **größten relativistischen Länge** von A nach B **keineswegs** mehr **geradlinig**...

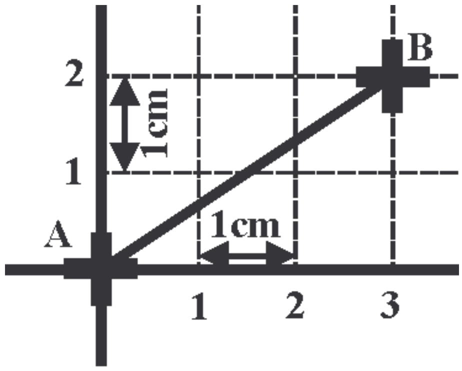
Es wird also Zeit, sich mit diesen „**Verkrümmungen**“ genau zu beschäftigen!

Was ist eine Metrik?



Wir kehren einmal zurück zum guten alten **kartesischen Koordinatensystem** mit x- und y-Achse. In unserem Beispiel sind zwei Punkte A, B mit den Koordinaten (0 | 0) bzw. (3 | 2) eingezeichnet.

> *Eine **Metrik** legt fest, auf welche Weise man den Abstand zwischen zwei Punkten bestimmt.*



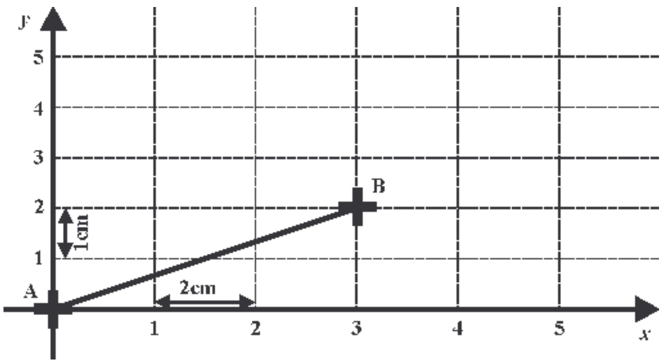
Im Normalfall ist das völlig unproblematisch. Denn üblicherweise ist es so, dass auf beiden Achsen die einzelnen Koordinatenschritte immer gleich weit voneinander entfernt sind.

Beispielsweise könnte dieser Abstand auf beiden Achsen immer 1 cm betragen (siehe rechts).

Dann berechnet sich der Abstand $\overline{AB}$ nach dem guten, alten Pythagoras wie folgt:

$$\overline{AB}^2 = (3 \cdot \mathbf{1\,cm})^2 + (2 \cdot \mathbf{1\,cm})^2$$

Durch die Maßstäbe in x- bzw. in y-Richtung ist eine **Metrik** gegeben.



Nun stellen wir uns das Gitter des Koordinatensystems als eine dehnbare **Gummimatte** vor.

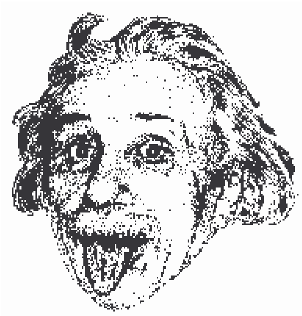
Ziehen wir die Gummimatte doch mal in x-Richtung auf doppelte Länge auseinander.

Wie man sieht, haben die Punkte A und B immer noch die Koordinaten (0 | 0) und (3 | 2).

Aber durch die **verzerrte Gummimatte** ergibt sich jetzt auch eine **neue Metrik** zur Abstandsmessung:

$$\overline{AB}^2 = (3 \cdot 2\,\mathbf{cm})^2 + (2 \cdot \mathbf{1\,cm})^2$$

A und B sind mit dieser verzerrten Gummimatte (= Metrik) weiter voneinander entfernt!



Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

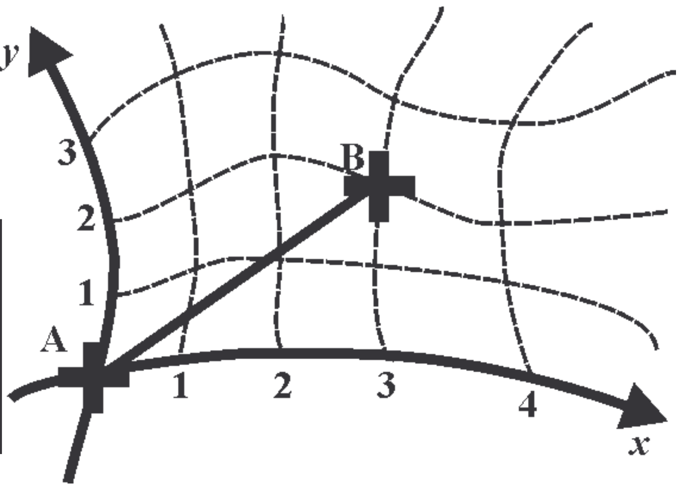
Lektion 16

Abstände in einer verzerrten Metrik

Natürlich ist es denkbar, die **Gummimatte** (= **Metrik**) noch viel verrückter zu verzerren!

Bislang haben wir die Verzerrung gleichmäßig vorgenommen. Gummimatten lassen sich auch ganz wild und unregelmäßig dehnen (siehe rechts).

*Bei einer **unregelmäßigen Metrik** ist es notwendig, für **jedes einzelne** Kästchen im Gitter **separat** die Maßstäbe festzulegen!*



Die Berechnung des Abstandes $\overline{AB}$ wird bei einer unregelmäßigen Metrik deutlich schwieriger. Die einzelnen Koordinatenkästchen haben nicht mehr gleiche Seitenlängen, sondern sind individuell verzerrt.

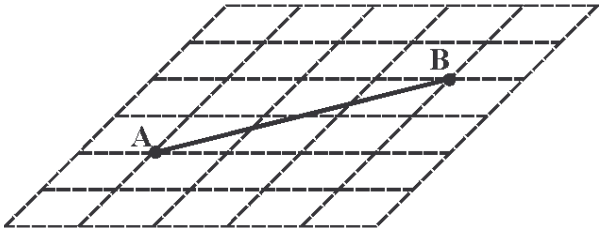
Um die Sache doch noch ein wenig anschaulicher zu machen, wählte Albert Einstein ein besser nachvollziehbares Bild:

Die Metrik einer flachen und einer gekrümmten Ebene

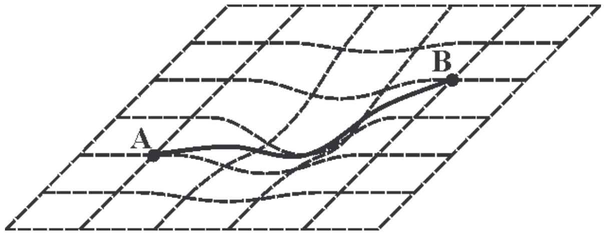
Stellen wir uns also die Punkte A und B zunächst auf einer **flachen Gummimatte** vor (siehe Abb. links auf der folgenden Seite).

Da hier eine völlig **regelmäßige Metrik** vorliegt, berechnet sich der Abstand einfach:

$$\overline{AB}^2 = (3 \cdot \mathbf{1\,cm})^2 + (2 \cdot \mathbf{1\,cm})^2 \Rightarrow \overline{AB} \approx \underline{\underline{3{,}6cm}}$$



A,B auf einer flachen Gummimatte



A,B auf einer verkrümmten Gummimatte

Im Vergleich dazu ist die **Metrik** in der rechten Abbildung **verkrümmt**. Die einzelnen Kästchen sind umso mehr verzerrt, je stärker die Krümmung der Gummimatte ist.

Auch hier ist es gar nicht einfach, den Abstand $\overline{AB}_{verkrümmt}$ in der verkrümmten Metrik zu berechnen. Dazu müsste man genau die Abmessungen der einzelnen Metrik-Kästchen wissen.

Aber: Auf der verkrümmten Gummimatte ist der Weg von A nach B auf jeden Fall länger!

Damit ist klar:

$$\overline{AB}_{verkrümmt} > \overline{AB}_{flach}$$

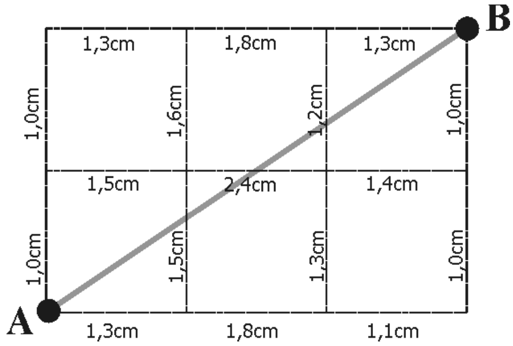
*Zwei Punkte A, B haben in einer **verkrümmten Metrik** einen **größeren Abstand** voneinander als in einer regelmäßigen, flachen Metrik.*

*Je **stärker** die **Krümmung** der Metrik ist, desto **größer** ist der **Abstand** der zwei Punkte.*

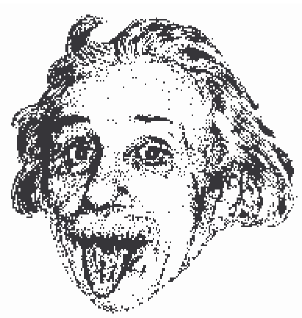
Aufgabe 6 – Abstände in einer verzerrten Metrik (näherungsweise)

*Normalerweise lernen Mathematikstudentinnen und –studenten im Gebiet **Differenzialgeometrie** die Berechnung von Abständen in einer verzerrten Metrik. Dennoch solltest Du mal versuchen, näherungsweise so einen Abstand $\overline{AB}_{verkrümmt}$ zu berechnen.*

Unten siehst Du die verkrümmte Gummimatten-Metrik als regelmäßiges Gitter. An jeder Kästchen-Kante ist deren Länge angegeben. Diese Angaben variieren je nach Krümmung:



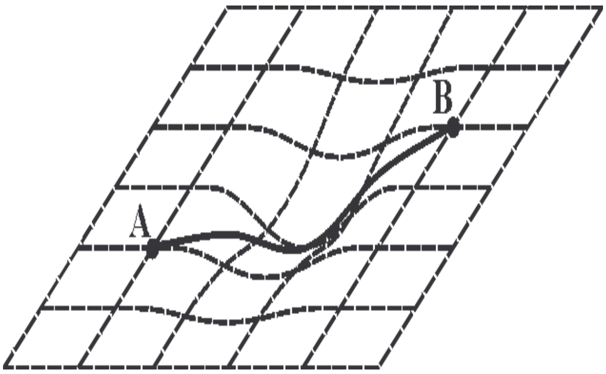
➢ *Berechne $\overline{AB}_{verkrümmt}$ so genau wie möglich! Zerlege [AB] in mehrere Teile!*

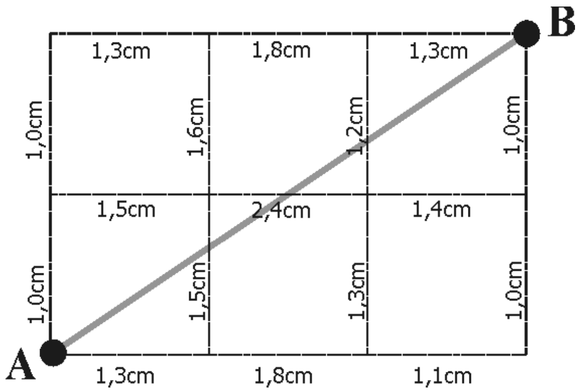


Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 17

Abstände in einer verzerrten Metrik





In Aufgabe 6 waren zwei Punkte A und B in einer verzerrten Metrik (Abb. oben links) gegeben, und man sollte den Abstand $\overline{AB}_{verkrümmt}$ so genau wie möglich berechnen. Hierzu ist es nützlich, die verzerrte Metrik näherungsweise in einem regelmäßigen Gitter darzustellen. Bei dieser Darstellung im regelmäßigen Gitter ist es dann aber nötig, die Abstände von Gitterpunkt zu Gitterpunkt ausdrücklich anzugeben (Abb. oben rechts).

*Eine **verzerrte Metrik** lässt sich stets nur **näherungsweise** in einem **regelmäßigen, rechtwinkligen Gitter** wiedergeben. Um wirklich **exakt** zu sein, müsste man das regelmäßige, rechtwinklige Gitter zwischen A und B in unendlich viele, unendlich kleine Kästchen einteilen – natürlich mit unendlich vielen Abstandsangaben! (→ Differenzialgeometrie)*

Bei der genäherten Berechnung von $\overline{AB}_{verkrümmt}$ könnte man die Strecke [AB] z.B. in vier Teile zerlegen – nämlich jedes Mal, wenn die Strecke eine Kästchengrenze überschreitet.

Dann ergäbe sich:

$$\overline{AB}_{verkrümmt} \approx \sqrt{(1{,}3cm)^2 + (\tfrac{2}{3}\cdot 1{,}5cm)^2} + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\cdot 2{,}4cm)^2 + (\tfrac{1}{3}\cdot 1{,}5cm)^2} +$$

$$+\sqrt{(\tfrac{1}{2}\cdot 2{,}4cm)^2 + (\tfrac{1}{3}\cdot 1{,}2cm)^2} + \sqrt{(1{,}3cm)^2 + (\tfrac{2}{3}\cdot 1{,}2cm)^2} \approx$$

$$\approx 1{,}64cm + 1{,}3cm + 1{,}26cm + 1{,}53cm = \underline{\underline{5{,}73cm}}$$

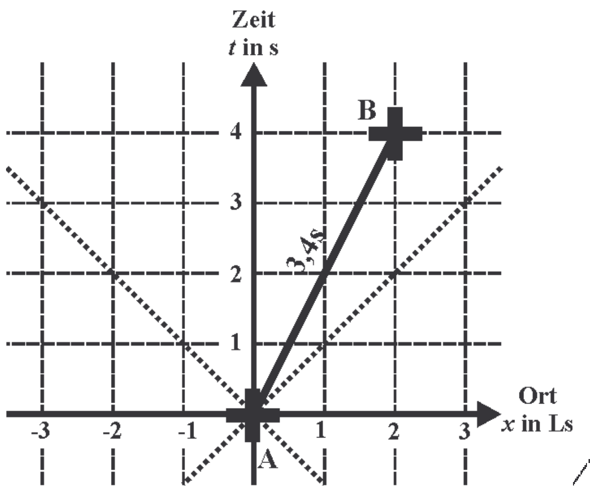
Es ist leicht einzusehen, dass das **Koordinatensystem** und die **Abstandsmessung** in einer verzerrten Metrik nichts mehr miteinander zu tun haben. In der Beispielsmetrik sind die Punkte A und B im Gitter des Koordinatensystems genau 3 Schritte in *x*-Richtung und 2 Schritte in *y*-Richtung voneinander entfernt. Aus dieser Koordinaten-Information (3 | 2) lässt sich allerdings in einer verzerrten Metrik **nichts** mehr über den Abstand $\overline{\mathrm{AB}}$ folgern.

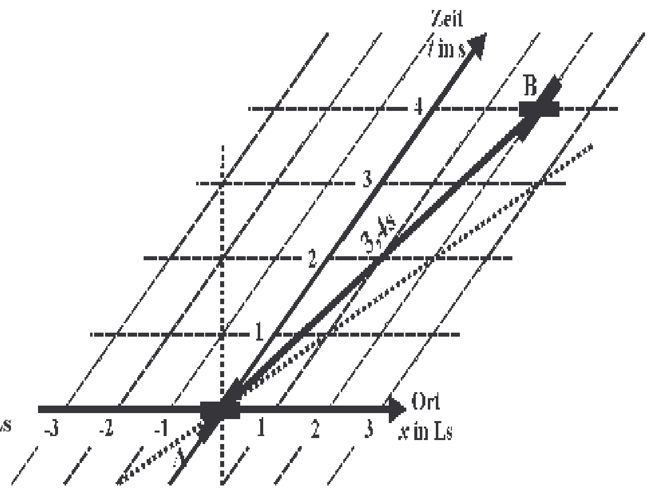
*In einem **Koordinatensystem** mit **verzerrter Metrik** sollten wir zwei Dinge beachten:*

- *Das **Koordinatensystem** lässt <u>keinerlei</u> Aussagen über den **Abstand** zweier Punkte A und B zu. Wir berechnen $\overline{\mathrm{AB}}$ mit Hilfe der **Metrik** (bzw. deren Abstandsangaben).*
- *Dennoch ermöglicht es das **Koordinatensystem** nach wie vor, jede **Position** eindeutig zu beschreiben. Wenn wir im obigen Beispiel den Ursprung (0 | 0) links unten setzen, so liegt A bei (1 | 2) und B bei (4 | 4).*

Abstände in der verzerrten Raum-Zeit (I)

Bislang war unsere Raumzeit regelmäßig. Der Einfachheit wegen haben wir die Diagramme stets nur mit einer Ortsachse (*x*-Achse) und der Zeitachse gezeichnet (siehe Abb. unten links).



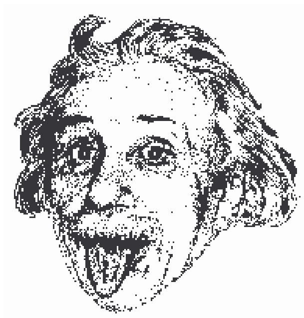


Damit wir uns die Raumzeit verzerrt vorstellen können, müssen wir dieses Raumzeit-Diagramm zunächst nach hinten in den Raum „kippen“ (siehe Abb. oben rechts).

Denn dann können wir in diese Raumzeit „Dellen“ hinein machen – genau wie im Beispiel zuvor! Und mit dieser neuen Idee wird aus der **regelmäßigen Raumzeit-Metrik** von Hermann Minkowski endlich die sagenumwobene **Metrik der verzerrten Raumzeit**!

Dazu beachten wir bei den relativistischen Raumzeit-Abständen bloß den gleichen Grundsatz:

***Weltlinien [AB]**, die durch eine **Verkrümmung** („Delle“) laufen, haben*
*eine **größere Länge** $\overline{\mathrm{AB}}$ als Weltlinien [AB], die durch eine regelmäßige Metrik laufen.*
*Je **stärker** die Verkrümmung ist, desto größer ist die Länge $\overline{\mathrm{AB}}$.*

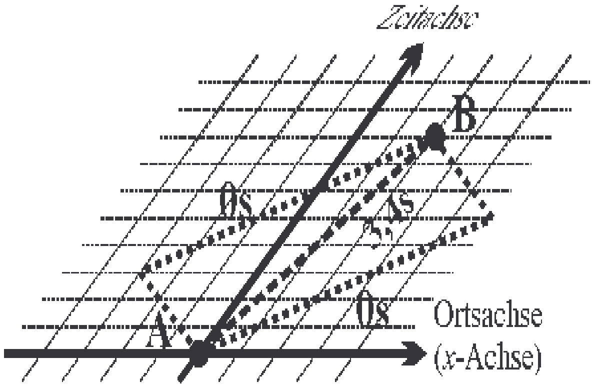


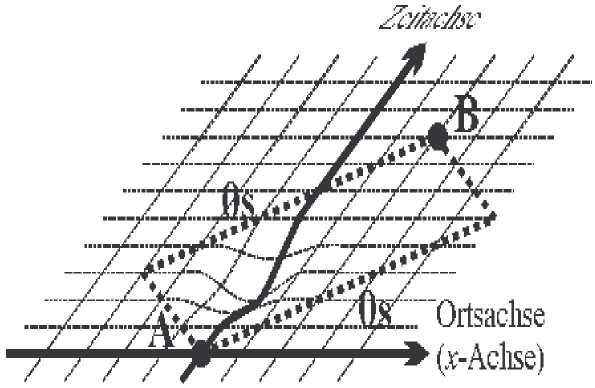
Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 18

Abstände in der verzerrten Raum-Zeit (II)

Vergleiche die folgenden Abbildungen unten links (regelmäßig) und rechts (verkrümmt):





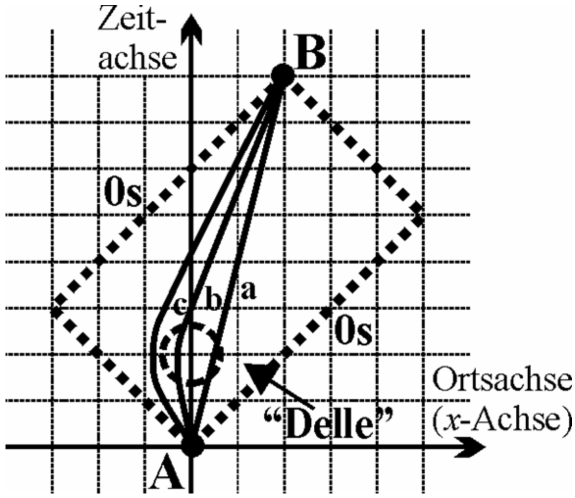
Betrachten wir zuerst die **regelmäßige Raumzeit** links:

- Verschiedene Weltlinien von A nach B haben verschiedene relativistische Länge.
- Die beiden eingezeichneten „Rand-Weltlinien" von A nach B sind **Licht-Weltlinien** (45°-Diagonalen!). Deren relativistische **Länge** ist jeweils gleich **0s**.
- Die relativistisch **längstmögliche Weltlinie** in einer regelmäßigen Raumzeit ist die **geradlinige Verbindung** zwischen A und B. Im Beispiel beträgt deren Länge 3,4s.

Nun kommen wir zur **Raumzeit** rechts, die an einer Stelle **verkrümmt** („eingedellt") ist:

- Auch hier kann man **Licht-Weltlinien** von A nach B einzeichnen, die die relativistische **Länge 0** haben.
- **Weltlinien** von A nach B, die durch die Delle verlaufen, werden durch die **Verkrümmung** künstlich etwas **verlängert**.
- Dadurch ist die **geradlinige Verbindung** zwischen A und B **nicht** mehr zwangsläufig die relativistisch **längstmögliche**!

Jetzt mit Delle in der Raumzeit: Relativistischer Längenvergleich



Rechts ist die Delle in der Raumzeit durch einen Kreis angedeutet. Zusätzlich sind drei Weltlinien von A nach B eingezeichnet, die wir betrachten:

- **Weltlinie a**:
  Diese geradlinige Verbindung zwischen A und B wäre zumindest **ohne „Delle“** die relativistisch **längstmögliche**.
- **Weltlinie b**:
  Sie führt **durch die „Delle“** von A nach B.
  Dadurch ist diese Weltlinie relativistisch **länger** als die geradlinige Verbindung!
- **Weltlinie c**:
  Sie führt nicht mehr durch die „Delle“. Sie verläuft außerdem schon relativ nahe der **Licht-Weltlinie** von A nach B (relativistische **Länge 0s**). Folglich ist diese Weltlinie sicherlich relativistisch kürzer als die anderen beiden Weltlinien.

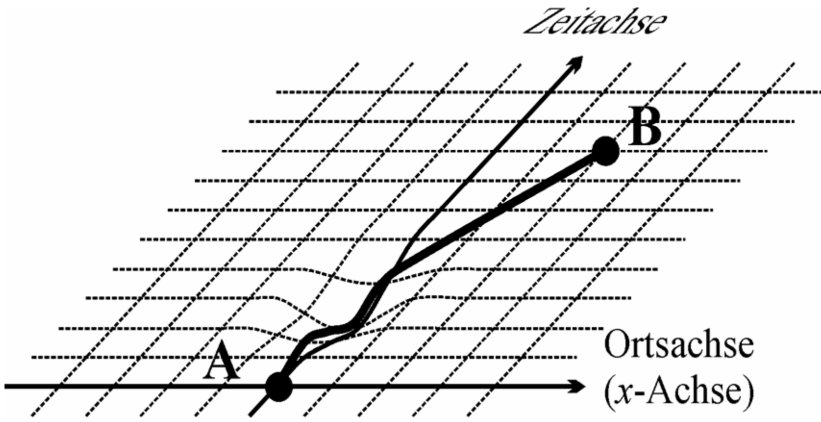
Wir haben in Lektion 15 bereits das Bewegungsgesetz für kräftefreie Körper kennen gelernt:

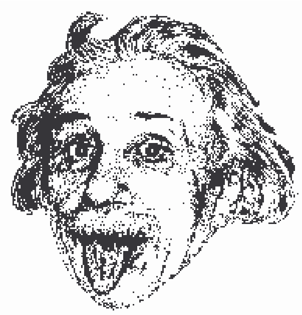
*Die **Weltlinie** eines **kräftefreien Körpers** zwischen **zwei Ereignissen** ist genau so beschaffen, dass deren relativistische **Länge möglichst groß** ist.*

Solange es in der Raumzeit **keinerlei Krümmungen** gibt, ist stets die **geradlinige Verbindung** zwischen zwei Ereignissen die relativistisch **längstmögliche**.

***Verkrümmungen** in der Raumzeit **vergrößern** die relativistische **Länge** von Weltlinien.*
*In einer verkrümmten Raumzeit muss die **geradlinige Verbindung nicht mehr** die **längstmögliche** Weltlinie zwischen zwei Ereignissen sein.*

Also würde sich ein **kräftefreier Gegenstand** von Ereignis A nach Ereignis B nicht auf der geradlinigen Weltlinie, sondern auf der Weltlinie durch die „Delle“ bewegen (siehe b)!





Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 19

Die Gravitation in der ART (I)

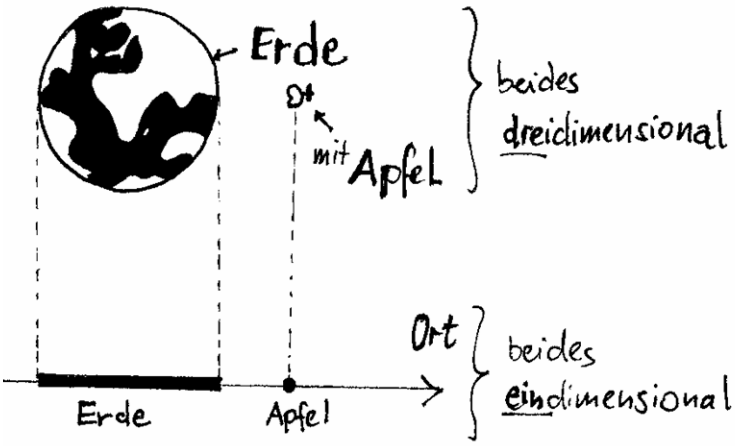
Gegenstände in Raumzeit-Diagrammen

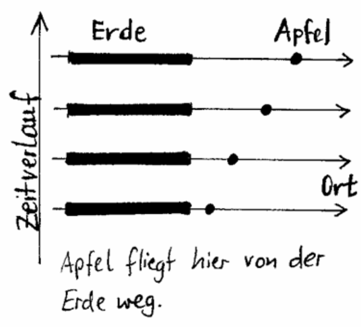
Angeblich hat ja **Isaac Newton** seine Idee von der **Gravitationskraft** gehabt, als er einen **Apfel** auf die **Erde** fallen sah. Die Gravitationskraft benötigt man in der **ART** nicht mehr. Stattdessen erklärt die ART das Phänomen „Gravitation" nur mit Hilfe der **Krümmung der Raumzeit**.

Wie müssen wir **Gegenstände** (z.B. Erde und Apfel) in **Raumzeit-Diagrammen** zeichnen?

Sagen wir einmal, ein Apfel befindet sich in beachtlicher Entfernung von der Erde.

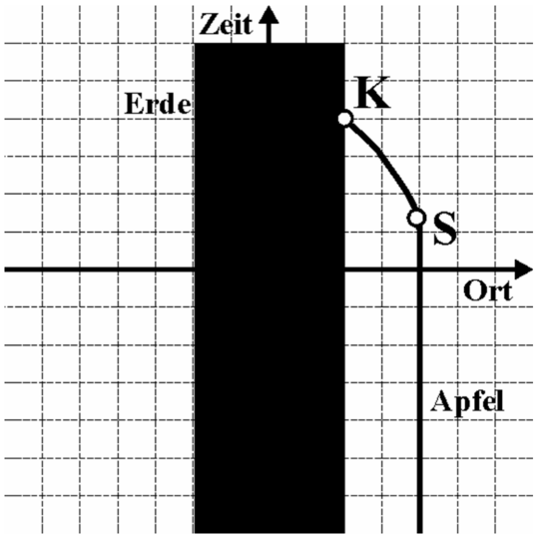
Da wir in unseren **Raumzeit-Diagrammen** der Einfachheit halber nur **eine** Orts-Dimension verwenden, müssen wir Erde und Apfel auf das **Eindimensionale** reduzieren (siehe rechts)…





Erde und Apfel sind daher in unseren Raumzeit-Diagrammen eigentlich „strichförmig" (eindimensional). Der Apfel kann sich in dieser eindimensionalen Welt auf die Erde zu oder weg bewegen. Im Beispiel links siehst Du einen Apfel, der von der Erde wegfliegt. Wie gewöhnlich zeichnet man in **Raumzeit-Diagrammen** den **Zeitverlauf** von unten nach oben ein.

Das **Raumzeit-Diagramm** einer **ruhenden Erde** und eines **bewegten Apfels** sieht folglich wie rechts gezeigt aus. Die **Weltlinie** der „großen" Erde erscheint als breiter Balken. Da die Erde nicht aufhört zu existieren, müsste dieser Balken in Zeitrichtung (nach oben und unten) natürlich weitergehen.



Der Apfel ist so „klein", dass seine **Weltlinie** im Diagramm wirklich als „dünner" Strich eingezeichnet ist.

Diese Apfelweltlinie könnte man so interpretieren:

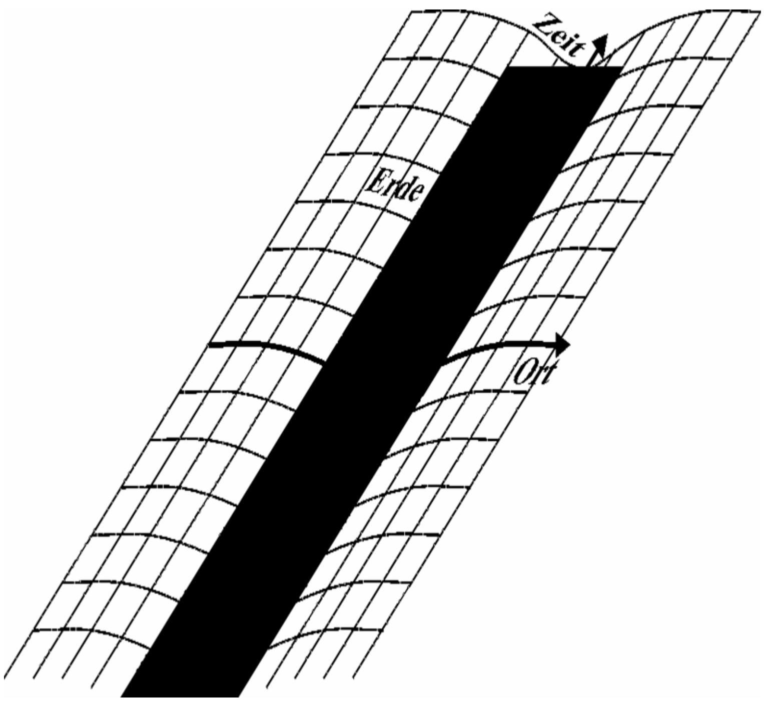
Der **Apfel** hängt eine Zeit lang auf einem Baum in **konstantem Abstand** zur Erde. Der Baum müsste ca. 6000 km hoch sein – aber das soll uns nicht stören. Beim **Ereignis S** reißt der Stängel. Der Apfel nähert sich der Erde. Und beim **Ereignis K** trifft der Apfel auf die Erde.

Masse krümmt die Raumzeit

In der ART haben alle Gegenstände die Eigenschaft, die Raumzeit zu verkrümmen!
Die **Raumzeit-Verkrümmung**, die so ein Gegenstand verursacht, ist umso stärker, je größer die **Masse** des Gegenstands ist.

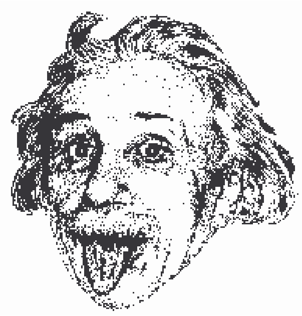
Beispielsweise krümmt die Erde die Raumzeit wie in diesem Diagramm angedeutet:

Der Apfel würde im Vergleich dazu keine nennenswerte Krümmung in der Raumzeit erzeugen.



*In der Umgebung **aller Gegenstände** ist die **Raumzeit verkrümmt**.*

*Je **größer** die **Masse** eines Gegenstands, desto **größer** ist diese **Verkrümmung**.*



Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 20

Die Gravitation in der ART (II)

Wie fällt der Apfel auf die Erde?

In der ART tritt die Gravitation nicht mehr als Kraft auf.

Also gilt für den Apfel und dessen Bewegung das…

Bewegungsgesetz für kräftefreie Körper*:*

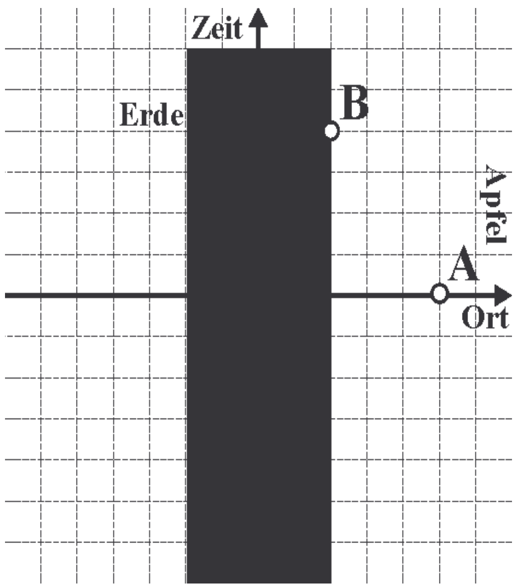
*Die **Weltlinie** eines **kräftefreien Körpers** zwischen zwei Ereignissen ist genau so beschaffen, dass dessen **relativistische Länge möglichst groß** ist.*

Wir wissen außerdem:

***Verkrümmung** des Raumes **vergrößert** die **relativistische Länge** einer Weltlinie.*

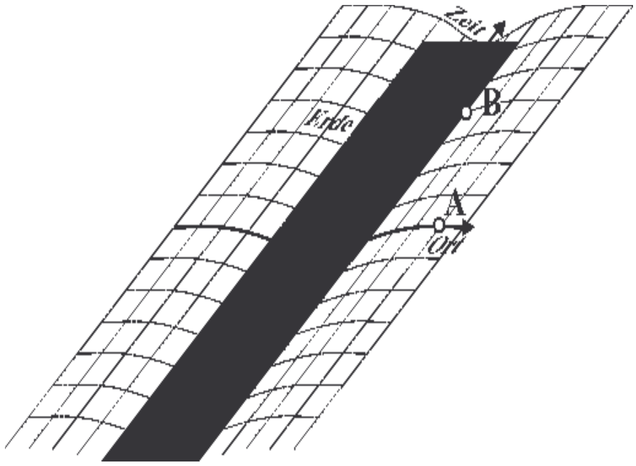
Betrachten wir also die Situation in einem **Raumzeit-Diagramm** näher:

- Ein **Apfel** befindet sich beim **Ereignis A**.
- Die große **Erde** ist als **schwarzes Rechteck** ins **Raumzeit-Diagramm** eingezeichnet.
- Zu einem späteren Zeitpunkt trifft der **Apfel** auf der **Erde** ein (→ **Ereignis B**).



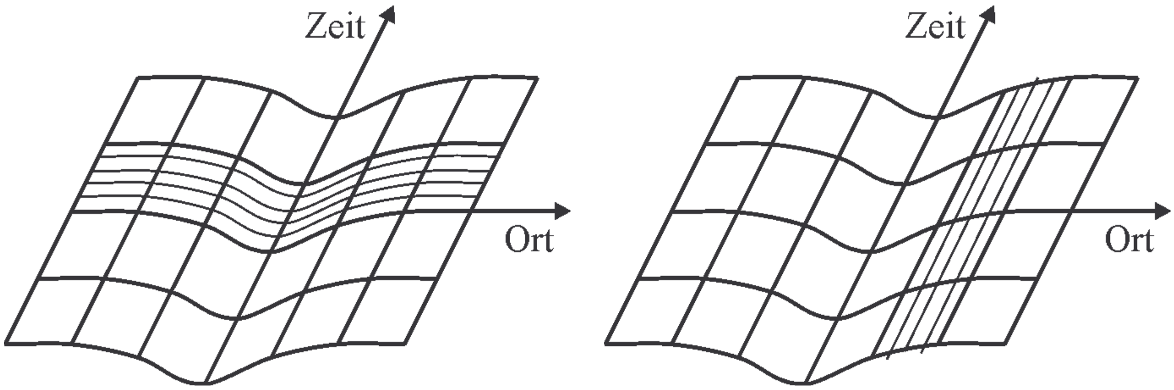
Auf welcher Weltlinie bewegt sich hierbei der Apfel von Ereignis A nach Ereignis B?

Wie wir in Lektion 19 bereits gesehen haben, **krümmt** die **Erde** als massives Objekt die **Raumzeit** in ihrer Umgebung. Das kann man sich etwa wie rechts gezeigt vorstellen.



Das Besondere an dieser Raumzeit-Krümmung ist nun, dass die **Raumzeit** hier nur in **Ortsrichtung**, **nicht** jedoch in **Zeitrichtung** gekrümmt ist!

Das verstehen ein normal denkender Mensch am besten mit Hilfe von weiteren Zeichnungen:



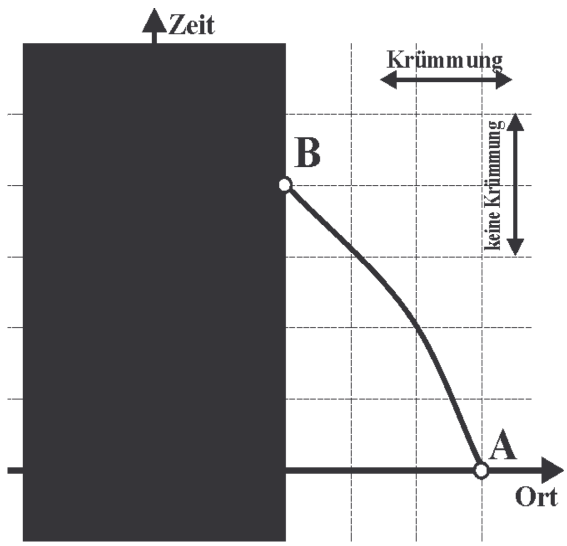
*Weltlinien **parallel** zur **Ortsrichtung** sind durch die Erde **verkrümmt** –*
*Weltlinien **parallel** zur **Zeitrichtung** hingegen erfahren **keine Krümmung**.*

Aufgabe 7 – Krümmung macht Weltlinien relativistisch länger

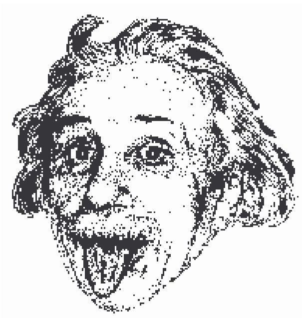
Hier ist eine leicht gebogene Weltlinie A-B eingezeichnet.
Das schwarze Rechteck stellt die Erde dar.

Wegen der Raumzeit-Krümmung wird die Weltlinie A-B relativistisch verlängert. Allerdings ist dieser Verlängerungseffekt nicht immer gleich stark.

*In der **Nähe von B** wird die **Weltlinie A-B** deutlich **stärker verlängert** als in der **Nähe von A**.*



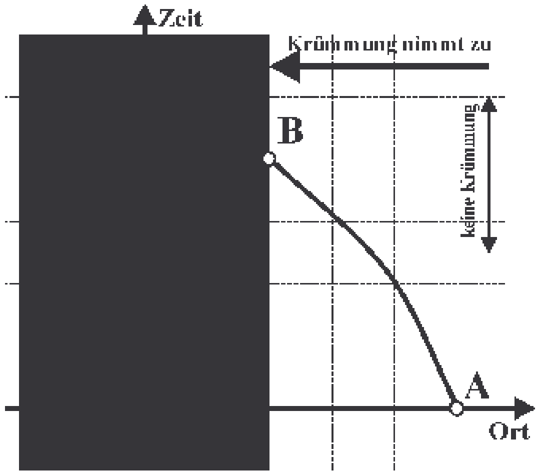
➢ *Findest Du zwei verschiedene Gründe, weshalb dies so ist?*



Einsteins allgemeine Relativitätstheorie

Lektion 21

Die Gravitation in der ART (III)



Weltlinien werden relativistisch verlängert

Die eingezeichnete **Weltlinie A-B** wird in der Nähe von B **stärker verlängert** als in der Nähe von A.

Das liegt gleich an zwei Effekten:

*Die **Raumzeit-Krümmung** ist umso **größer**, je **näher** man bei der **Erde** ist.*

*Bei B verläuft die **Weltlinie** etwas **mehr** in **Richtung der Krümmung** als bei A.*

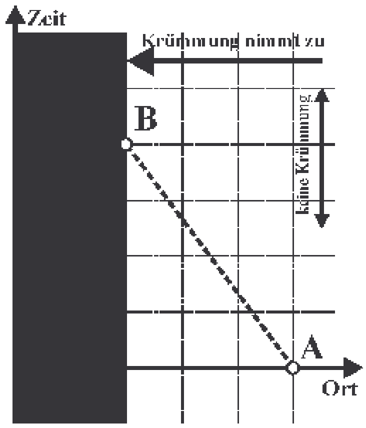
*Die **Weltlinie A-B** wird in der Nähe von B **stärker** relativistisch **verlängert** als in der Nähe von A.*

Warum wird ein Apfel durch die Erde angezogen und beschleunigt?

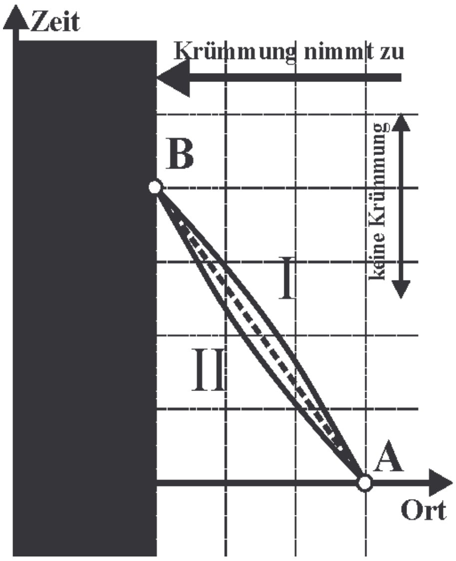
Ein Apfel, der im Ereignis A startet und beim Ereignis B auf die Erde fällt, würde sich **ohne Raumzeit-Krümmung** auf einer **geradlinigen Weltlinie** von A nach B bewegen.

Weil die Erde aber die Raumzeit krümmt, ist die gerade Verbindung A-B nicht mehr die relativistisch längstmögliche.

*In einer **gekrümmten** Raumzeit gibt es relativistisch **längere** Weltlinien von A nach B als die **geradlinige** Verbindung A-B.*



Nun überlegen wir uns zwei kleine **Varianten** I und II zur geradlinigen Weltlinien A-B.



- **Variante I:**
  Die Variante I läuft vor allem in der Nähe von **B** etwas **mehr** in **Richtung der Krümmung**. Gleichzeitig ist in der Nähe von **B** eine **starke Krümmung** (Erdnähe).

  Insgesamt ergibt sich bei Variante I eine starke relativistische Verlängerung.

- **Variante II:**
  Gerade in der Nähe von **B**, wo die **Raumzeit-Krümmung** sehr **stark** wäre (Erdnähe), verläuft die Variante I **weniger** in **Richtung der Krümmung**.

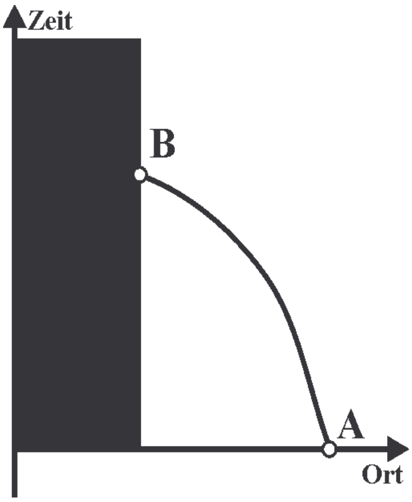
  Insgesamt ergibt sich bei Variante II eine geringere relativistische Verlängerung.

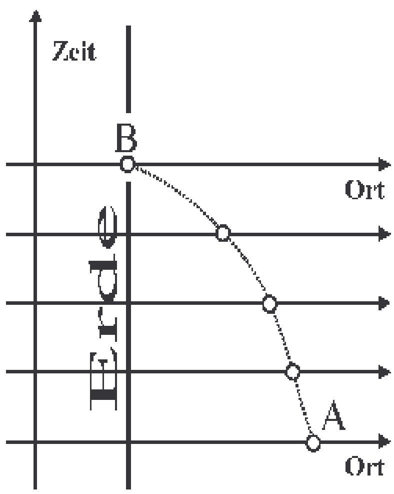
> *Die **Weltlinie** eines **kräftefreien Körpers** zwischen zwei Ereignissen ist genau so beschaffen, dass dessen **relativistische Länge möglichst groß** ist.*

Als Folge des Bewegungsgesetzes der ART wird sich die Natur für eine **Weltlinie A-B** entscheiden, die eine **Biegung** wie in **Variante I** hat.

Denn in Variante I ist die relativistische Länge möglichst groß.

Und das bedeutet, dass der Apfel beim Fallen von A nach B immer schneller wird!





Damit erklärte sich die **Gravitation** erstmals mit der ART rein durch die Geometrie der verkrümmten Raumzeit. Mit Albert Einstein hörte die zugehörige **Gravitationskraft** auf notwendig zu sein.

Weitere Phänomene wie die **Lichtablenkung** durch **Gravitation** lassen sich mit der ART ebenfalls erklären: Es gibt auch ein **Bewegungsgesetz** für **Lichtstrahlen** – und die **Raumzeit-Krümmung** beeinflusst deshalb auch den Weg des Lichtes.

> *Die **Lichtablenkung** war mit **Isaac Newtons Gravitationskraft** übrigens **unerklärlich**! Denn **Lichtphotonen** gelten als **masselos** und sind Newtons Gravitationskraft deshalb gar nicht unterworfen. Nach Newton kann Licht durch Gravitation nicht abgelenkt werden…*